

**Ein Beitrag zur Übertragung
digitaler Signale im Basisband**

von
Reinhard Till

Erlangen 1975

Ein Beitrag zur Übertragung digitaler Signale im Basisband

**Dem Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR**

vorgelegt

von

Reinhard Till

Erlangen 1975

Ein Beitrag zur Übertragung
digitaler Signale im Basisband



Als Dissertation genehmigt vom
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen/Nürnberg

Tag der Einreichung: 7. April 1975

Tag der Promotion: 18. Juli 1975

Dekan: Prof. Dr.rer.nat. H.J.Schneider

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. W.Schübler
Prof. Dr.-Ing. R.Unbehauen

Reinhold III

Erlangen 1975

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Schüller gebührt mein besonderer Dank für seine stete Gesprächsbereitschaft, wertvolle Anregungen und kritische Hinweise während der Betreuung dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen danke ich für sein durch die Übernahme des Korreferats bewiesenes Interesse an der Arbeit.

Ferner möchte ich Herrn Dr.-Ing. K. Antreich für sein Interesse am Fortgang der Untersuchungen und Herrn Dr.-Ing. M. Welzenbach für viele hilfreiche Diskussionen danken.

Inhaltsverzeichnis

Seite

1.	<u>Einleitung</u>	10
2.	<u>Systembeschreibung und Aufgabenstellung</u>	12
3.	<u>Codierung</u>	18
3.1.	Aufgabe der Codierung und Code-Arten	18
3.2.	Redundanzfreie Mehrstufencodierung (ML-Codierung)	18
3.3.	Partial-Response-Codierung (PR-Codierung)	22
3.3.1.	Grundlagen, erläutert am Beispiel einer Übertragung mit der Nyquist-rate	22
3.3.2.	Zwei Realisierungsverfahren	27
3.3.3.	Der Codierer	27
3.3.4.	Übertragung mit einer kleineren als der Nyquist-rate	30
3.3.5.	Zur Klassifizierung der PR-Codes	31
3.3.6.	Code-Auswahl	32
3.3.7.	Die Vorcodierung	34
4.	<u>Impulsinterferenz und Augendiagramm</u>	39
4.1.	Übersicht	39
4.2.	Die Amplitudenniveaus am Entscheidungsein- gang bei idealem Übertragungskanal	42
4.3.	Die Amplitudenniveaus bei realem Übertra- gungskanal und das Augendiagramm	46
4.4.	Der innere Augenrand ("Auge")	48
4.4.1.	Die allgemeine Berechnung des Auges aus dem Augendiagramm	48
4.4.2.	Kenngrößen des Auges	52
4.4.3.	Die Berechnung des Auges bei den ausge- wählten Codes	54
4.4.3.1.	Das Auge bei Codierung nach Partial-Res- ponse Klasse 4, $n=3$ (Code IV)	55
4.4.3.2.	Das Auge bei pseudoternärer Codierung (Code III)	60

	Seite
4.4.3.3. Das Auge bei duobinärer Codierung (Code II)	65
4.4.3.4. Das Auge bei binär-bipolarer Codierung (Code I)	69
4.4.3.5. Zusammenstellung der Formeln zur Augenbe- rechnung als Funktion von $h_{JK}(t)$ für die Codes I-IV	71
4.4.3.6. Das Auge bei redundanzfreier Mehrstufen- codierung	74
4.5. Vergleich von gemessenen und berechneten Augen anhand eines Beispiels	76
5. <u>Leistungsspektren, Signal- und Störleistung</u>	79
5.1. Die spektrale Leistungsdichte	80
5.1.1. Der allgemeine Fall	80
5.1.2. Die spektrale Leistungsdichte der behan- delten Codes	83
5.2. Die mittlere Signalleistung am Empfänger- eingang	85
5.3. Der Störabstand am Empfängereingang	87
5.4. Die mittlere Störleistung am Entscheider- eingang	88
6. <u>Die Fehlerwahrscheinlichkeit</u>	92
6.1. Allgemeines	92
6.1.1. Definition und Ursache eines Bitfehlers	92
6.1.2. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Rauscham- plitude innerhalb eines vorgegebenen Inter- valls liegt	94
6.2. Mittlere und worst-case-Fehlerwahrschein- lichkeit	95
6.2.1. Berechnung nach der direkten Methode	95
6.2.1.1. Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei redundanz- freier Mehrstufencodierung	96
6.2.1.2. Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei Partial- Response-Codierung	105

	Seite
6.2.2. Berechnung mit Hilfe der Momente der Verteilung der Signalwerte im Abtastzeitpunkt	110
6.3. Berechnung der optimalen theoretischen Fehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Störabstand am Empfängereingang für die ausgewählten Codes	118
6.3.1. Allgemeine Bemerkungen und Voraussetzungen	118
6.3.2. Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei Realisierung 1	118
6.3.3. Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei Realisierung 2	121
7. <u>Anwendungsbeispiele</u>	125
7.1. Übersicht und allgemeine Bemerkungen	125
7.2. Minimierung des relativen Augenfehlers	126
7.2.1. Tiefpässe für Realisierung 1	127
7.2.1.1. Näherungen	127
7.2.1.2. Bemerkungen zur Optimierung	129
7.2.1.3. Ergebnisse und Diskussion	130
7.2.2. Filter für Realisierung 2	137
7.2.2.1. Tiefpaß für den Duobinärkode (Code II)	138
7.2.2.2. Bandpaß für den PR-Code Kl.4, $n=3$ (Code IV)	138
7.3. Simultane Optimierung von Sende- und Empfangsfilter bezüglich minimaler worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit bei gegebener Übertragungsstrecke	140
7.3.1. Nachbildung der Übertragungsstrecke und Näherungen für Sende- und Empfangsfilter	142
7.3.2. Die Optimierung	142
7.3.3. Ergebnisse und Diskussion	144
8. <u>Zusammenfassung</u>	151
9. <u>Anhang</u>	153
9.1. Die geschlossene Berechnung der mittleren Signalleistung am Empfängereingang	153

	Seite
9.2. Abschätzung der für die Augenberechnung erforderlichen Anzahl von Abtastwerten $h(t_0 + \lambda \cdot T)$	163
9.3. Parameter der Übertragungsfunktionen der Beispiele aus Kap. 7	166
9.3.1. Übertragungsfunktionen, die in Abschnitt 7.2 durch Minimierung des relativen Augen- fehlers gewonnen wurden	166
9.3.2. Übertragungsfunktionen, die in Abschnitt 7.3 durch Minimierung der Fehlerwahrschein- lichkeit gewonnen wurden	172
<u>Literaturverzeichnis</u>	175

Liste der wichtigsten Formelzeichen

$\{a_\lambda\}$	Folge der von der Quelle abgegebenen binär-bipolaren Werte
$a_{\min}$	minimale Sperrdämpfung
$\{b_\lambda\}$	Folge der binär-bipolaren Werte am Ausgang des Vorcodierers
$\{c_\lambda\}$	Folge der Werte am Ausgang des Codierers
d_v	v-ter Koeffizient des PR-Einzelzeichens
$\tilde{e}_v$	Residuum zum v-ten Pol von $H_{EF}(s) \cdot H_{EF}(-s)$
$\tilde{e}_v$	Residuum zum v-ten Pol von $H_{EF}(s)$
$\hat{e}_v$	Residuum zum v-ten Pol von $H_{SF}(s) \cdot H_{US}(s)$
$g(t)$	aus Diracimpulsen zusammengesetztes PR-Einzelzeichen
$g^{(r)}(t)$	aus Rechtecken zusammengesetztes PR-Einzelzeichen
$\left. \begin{array}{l} h(t), h^{(Y)}(t) \\ h^{(0)}(t), h^{(N)}(t) \\ h_{\bar{U}K}(t) \end{array} \right\}$	Impulsantwort des Systems mit der Übertragungsfunktion $H(s), H^{(Y)}(s), H^{(0)}(s), H^{(N)}(s), H_{\bar{U}K}(s)$
i	Laufindex für Niveaus und Schwellen
j	imaginäre Einheit
k	Anzahl der bei ML-Codierung zu einem Block zusammengefaßten Binärzeichen
n	Zahl der PR-Koeffizienten d_v des PR-Einzelzeichens
$\tilde{n}(t)$	Momentanwert des Rauschens im Zeitpunkt t
$p_{a_\lambda}^{(+1)}$	Wahrscheinlichkeit, daß der Koeffizient a_λ den Wert +1 annimmt
p_y	Wahrscheinlichkeit, daß der Wert y auftritt
$p_{\bar{n}}(\xi)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Augenblickswerte des Rauschens
$p_w(\xi)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Momentanwerte von $w(t) = \bar{v}_\mu(t) + \bar{n}(t)$

$r(t)$	Rechteckzeichen der Höhe 1 und der Dauer T
$s = \sigma + j\omega$	komplexe Frequenzvariable
$s_{0\mu}$	μ -te Nullstelle
$s_{\infty v}$	v -ter Pol
t	Zeit
t_A	Abtastzeitpunkt
t_{opt}	optimaler Abtastzeitpunkt
t_0	beliebiger, aber fester Zeitpunkt aus dem Intervall $(0, T)$
$u_i(t_0)$	Zeitantwort am Entscheidereingang, die bei idealem Übertragungskanal im Zeitpunkt t_0 das i -te Niveau darstellt
$v(t)$	Zeitantwort am Entscheidereingang bei realem Übertragungskanal
$v_i^{(\mu)}(t_0)$	μ -ter dem i -ten Niveau zuzuordnender Wert des Signals $v(t)$ im Zeitpunkt t_0
$v_{i,\mu}(t_0)$	niveaubestimmender Anteil von $v_i^{(\mu)}(t_0)$
$\tilde{v}_\mu(t_0)$	niveauunabhängiger Anteil von $v_i^{(\mu)}(t_0)$
$x_1(t)$	von der Quelle abgegebene Zeichenfolge
$x_2(t)$	Zeichenfolge nach dem Vorcodierer
$x_3(t)$	Zeichenfolge nach dem Codierer
$x_4(t)$	Zeichenfolge am Ausgang des Empfangsfilters (Entscheiderpunkt)
A_i	Menge der niveaubestimmenden Koeffizienten-kombinationen des i -ten Niveaus
B_i	Menge der niveauunabhängigen Koeffizienten-kombinationen
$C, \dots, \tilde{C}, \dots$	Wege bei der Integration innerhalb der s -Ebene
D_v	maximaler vertikaler Augendurchmesser
D_h	horizontaler Augendurchmesser in Höhe der Schwelle
$(D_h)_{\max}$	maximaler horizontaler Augendurchmesser

$E(z)$	Mittelwert über alle möglichen Musterfunktionen z (Scharmittelwert)
$G(r)(j\omega)$	Fouriertransformierte von $g^{(r)}(t)$
$H(s)$	Übertragungsfunktion des aus Codierer, Sendefilter, Übertragungsstrecke und Empfangsfilter bestehenden Systems
$H^{(\gamma)}(s)$	Übertragungsfunktion eines "raised-cosine"-Tiefpasses mit dem roll-off-Faktor γ
$H^{(0)}(s)$	Übertragungsfunktion des "idealen" Tiefpasses
$H^{(N)}(s)$	Übertragungsfunktion eines Tiefpasses mit der Bandbreite ω_N
$H_C(s), H_{SF}(s),$ $H_{\bar{U}S}(s), H_{EF}(s)$	Übertragungsfunktionen von Codierer, Sendefilter, Übertragungsstrecke und Empfangsfilter
$H_{\bar{U}K}(s)$	
K	in einem Teil der Arbeit wird angenommen, $h_{\bar{U}K}(t)$ verschwinde für $t > (K+1) \cdot T$
L_i	i -te Amplitudenstufe, i -tes Niveau
M_i	Anzahl der zum i -ten Niveau führenden Koeffizientenkombinationen $\langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle$, $\mu=1, \dots, M_i$
N	mittlere Rauschleistung am Empfängereingang
N_0	konstante spektrale Leistungsdichte des Gaußschen Rauschens
N_E	mittlere Rauschleistung am Entscheidereingang
Q_i	i -te Schwelle im Entscheider
$\underline{Q}$	Vektor mit den Komponenten Q_i
$R(j\omega)$	Fouriertransformierte von $r(t)$
S	mittlere Signalleistung am Ausgang der Übertragungsstrecke
T	Takt

U	$= \sqrt{2N_E}$
$\dot{U}$	Übertragungsrate = Bitrate/Bandbreite
$\dot{U}_N$	Nyquist rate $2 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$
$W_x(\omega)$	mittlere spektrale Leistungsdichte von $x(t)$
Z	Anzahl der Niveaus bei mehrstufiger Übertragung
$\mathcal{L}_{ML}, \mathcal{L}_{PR}$	Codiererooperatoren für ML- bzw. PR-Codierung
$\mathcal{H}_V(x)$	V -tes Hermitesches Polynom
$\mathcal{M}_V(y)$	V -tes Moment der Verteilungsdichte $p_y(\xi)$
$\alpha_{u,i}(t)$	unterer } Rand des i -ten Auges
$\alpha_{o,i}(t)$	
β_N	Bandbreite des am Empfängereingang eingekoppelten Rauschens
γ	"roll-off-" Faktor bei Nyquist-Tiefpässen
$\delta(t)$	Dirac-Impuls im Zeitpunkt t
$\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho$	Laufindizes
σ	Realteil der komplexen Frequenzvariablen s
$\tau_G(\omega)$	Gruppenlaufzeit
$X_{\tilde{n}}$	Streuung der Verteilungsdichte $p_{\tilde{n}}(\xi)$
ω	Kreisfrequenz, Imaginärteil der komplexen Frequenzvariablen s
ω_g	Grenzfrequenz, speziell: Sperrgrenze
$\omega_N = 2\pi f_N = \frac{\pi}{T}$	Nyquist-Kreisfrequenz
$\Delta\alpha$	relativer Augenfehler
$\Delta T, (\Delta T)_{\min}$	(minimaler) relativer Schrittfehler
$\Phi = \frac{S \cdot T}{N_0}$	Störabstand am Empfängereingang
Ψ	Fehlerwahrscheinlichkeit
$\bar{\Psi}$	mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit
Ψ_{wc}	worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit
$\Psi_{i,\mu}$	Beitrag von $v_i^{(\mu)}$ zur gesamten Fehlerwahrscheinlichkeit
$\tilde{\Psi}_i$	Beitrag aller zum i -ten Niveau zu zählenden Werte $v_i^{(\mu)}$ des Signals zur Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit
Ψ_{opt}	Optimale theoretische Fehlerwahrscheinlichkeit

Abkürzungen und Indizes

I	Code I (Binär-bipolar)
II	Code II (Duobinär)
III	Code III (Pseudoternär)
IV	Code IV (PRC Klasse 4, $n=3$)
(0)	weist auf das Zeit- bzw. Frequenzverhalten des "idealen" Tiefpasses hin
(1)	Realisierung 1 } der PR-Codierung
(2)	
C	Codierer
EF	Empfangsfilter
ML	redundanzfreie Mehrstufencodierung ("multi-level coding")
(N)	weist auf eine Übertragung mit der Nyquist-rate hin
PR	redundante Mehrstufencodierung ("partial-response-coding")
(r)	weist auf die Übertragung von Rechteckzeichen hin
SF	Sendefilter
ÜK	Übertragungskanal
ÜS	Übertragungsstrecke (z.B. Kabel)
wc	worst-case
(γ)	weist auf einen Nyquist-Übertragungskanal mit dem roll-off-Faktor γ hin

1. Einleitung

In den letzten Jahrzehnten gewinnen Informationsübermittlung und Informationsaustausch zunehmend an Bedeutung. Ein wesentlicher Teil des Informationsflusses wird dabei von den nationalen und internationalen Fernmeldenetzen übernommen, die die Einrichtungen für die Übertragung und Vermittlung der Informationen zur Verfügung stellen. Zur Informationsübertragung wurden bisher aus technischen und wirtschaftlichen Gründen vornehmlich analoge Übertragungsverfahren eingesetzt, bei denen die Nachrichten amplituden- und zeitkontinuierlich übermittelt werden.

Ausgelöst durch die Erfindung des Transistors und die damit einsetzende systematische Erweiterung des Angebots an Halbleiterbauelementen und integrierten Schaltkreisen wird der technisch und wirtschaftlich sinnvolle Einsatz digitaler Modulations- und Übertragungsverfahren ermöglicht. Ist zur Zeit nur eine deutliche Aufwertung der digitalen Nachrichtenübertragungstechnik gegenüber der analogen zu beobachten, so könnte sie in nicht allzu ferner Zukunft sogar eine dominierende Stellung einnehmen. Für die Digitalisierung in der Nachrichtentechnik gibt es zwei wesentliche Gründe. Einerseits besteht die Möglichkeit zur Integration unterschiedlicher Dienste, wie z. B. des Fernsprechens, der Bildkommunikation, der Daten- und Faksimileübertragung usw. in einem einheitlichen Netz. Andererseits eröffnet sie die Möglichkeit der Integration von Vermittlungs- und Übertragungstechnik.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Beitrag zur Problematik der Basisbandübertragung digitaler Signale geliefert.

Unabhängig von der Entstehung der digitalen Signale sind beim Entwurf der erforderlichen Übertragungssysteme grundsätzlich die folgenden Aufgaben zu lösen:

- a) Die Erstellung praxisnaher Bewertungs- und Optimierungskriterien.
- b) Die Auswahl eines geeigneten Übertragungscode.
- c) Die optimale Auslegung der Sende- und Empfangsfilter sowie der Entzerrernetzwerke.

Zu den diese Aufgaben betreffenden Fragen existiert eine umfangreiche Literatur; stellvertretend für sie seien an dieser Stelle die Publikationen [1] bis [8] genannt. Der Wunsch nach möglichst praxisnaher Beurteilung der zu entwerfenden Systeme führt dabei zwangsläufig zu Optimierungskriterien, in denen Augendiagramm und Bitfehlerwahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle spielen. Mit der Herleitung einheitlicher Verfahren zur Berechnung dieser Systemkenngrößen für eine Anzahl häufig verwendeter Übertragungscode sowie der Anwendung der gewonnenen Beziehungen auf typische Übertragungstrecken soll die vorliegende Arbeit einen Beitrag leisten zum Entwurf von Basisband-Übertragungssystemen für digitale Signale.

2. Systembeschreibung und Aufgabenstellung

Anhand des in Bild 2.1 dargestellten Blockschaltbildes soll das Modell des in der Arbeit zugrundegelegten Übertragungssystems beschrieben und dessen Einzelbausteine charakterisiert werden. Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit werden teils im Zusammenhang mit den einzelnen Blöcken, teils im Anschluß an die Beschreibung des Gesamtsystems erläutert. Als Abkürzung für die Bezeichnung "digitale Signale" wird dabei häufig "Daten" verwendet.

Die Quelle gibt im zeitlichen Abstand T ("Takt") Dirac-Impulse ab, die mit den Koeffizienten $a_\lambda = \pm 1$ bewertet sind. Es entsteht eine binär-bipolare Zeichenfolge $x_1(t)$ der Form

$$x_1(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} a_\lambda \cdot \delta(t - \lambda \cdot T) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} a_\lambda \cdot \delta_\lambda(t) \quad (2.1)$$

$$\text{mit } a_\lambda \in \{1, -1\} \quad \text{und} \quad \underset{\text{Def.}}{\delta_\lambda(t)} = \delta(t - \lambda \cdot T).$$

Die Bitrate am Ausgang der Quelle ist $1/T$ mit der Dimension bit/sec.

Es wird angenommen, die Daten seien statistisch voneinander unabhängig. Positive und negative Zeichen seien gleichwahrscheinlich:

$$p_{a_\lambda}(+1) = p_{a_\lambda}(-1) = \frac{1}{2}. \quad (2.2)$$

Im folgenden wird die Quelle oft kurz als redundanzfreie Binärquelle bezeichnet.

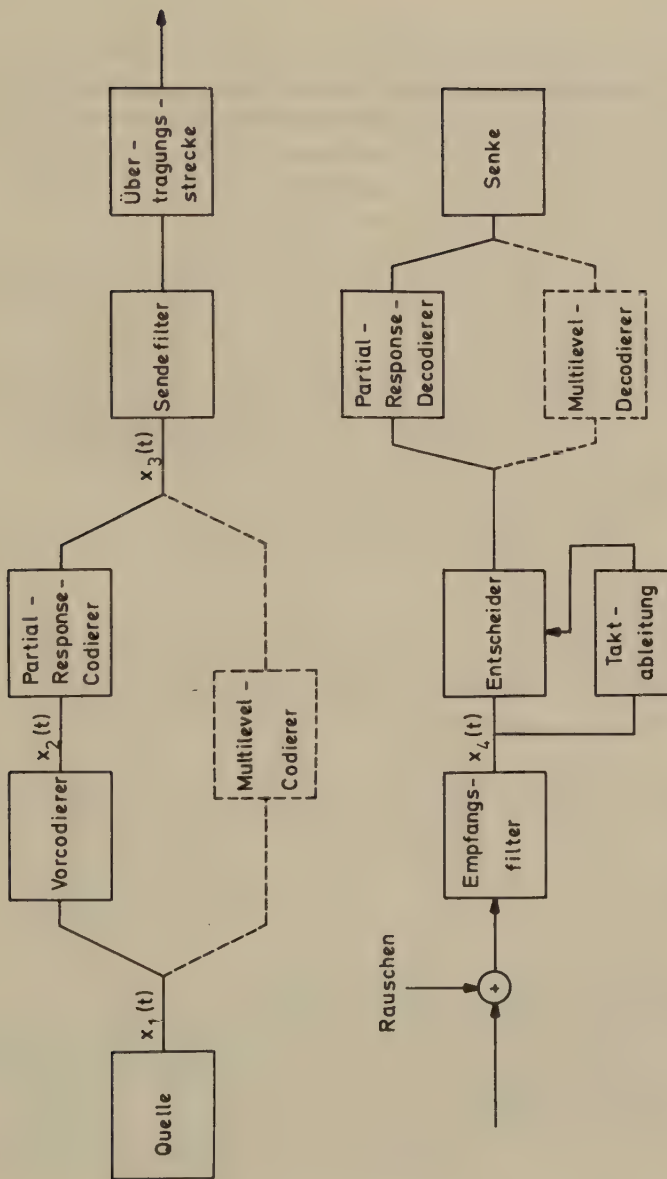


Bild 2.1: Modell des Übertragungssystems

Es werden zwei Typen von Codes betrachtet, redundanzfreie Mehrstufencodes ("multilevel codes", abkürzende Schreibweise: ML-Codes) und Teileinschwingcodes ("partial response codes" oder "correlative level codes", abkürzende Schreibweise: PR-Codes). Im Falle der PR-Codierung wird der Folge $x_1(t)$ zunächst durch den Vorcodierer die Folge

$$x_2(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} b_{\lambda} \cdot \delta_{\lambda}(t) \quad \text{mit } b_{\lambda} \in \{1, -1\} \quad (2.3)$$

zugeordnet. Die Vorcodierung (Abschnitt 3.3.7) ermöglicht auf der Empfangsseite die bitweise Entscheidung und vermeidet eine Fehlerfortpflanzung. Der partial-response-Codierer erzeugt aus dem Signal $x_2(t)$, der multilevel-Codierer direkt aus $x_1(t)$ die Zeichenfolge

$$x_3(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{\lambda} \cdot \delta_{\lambda}(t) \quad , \quad c_{\lambda} \text{ ganzzahlig} \quad . \quad (2.4)$$

Die Koeffizienten c_{λ} ergeben sich bei PR-Codierung dadurch, daß jedem Einzelzeichen aus $x_2(t)$, bei ML-Codierung dadurch, daß einer Gruppe aufeinanderfolgender Zeichen aus $x_1(t)$ ein neues Zeichen in $x_3(t)$ zugeordnet wird.

Die im Rahmen der Arbeit interessierenden Eigenschaften von PR-Codes einerseits und ML-Codes andererseits werden in Kap. 3 behandelt. Im gleichen Kapitel werden einige typische Codes ausgewählt, die in der Arbeit als Beispiele dienen.

Das Sendefilter hat mehrere Aufgaben. Einmal kann es zur Unterdrückung unerwünschter Spektralanteile von $x_3(t)$ eingesetzt werden, falls die Übertragungsstrecke für Frequenzmultiplexübertragung vorgesehen ist. Zum anderen trägt es zusammen mit dem Empfangsfilter zur Entzerrung und Impulsformung bei. Dabei muß durch die Entzerrung nicht notwendig ein konventioneller Dämpfungs- und Laufzeitausgleich angestrebt werden, vielmehr sollte sie im Hinblick auf eine

optimale Auslegung des Gesamtsystems erfolgen (vgl. Kap. 7). Für den Fall, daß die Signalleistung am Ausgang des Sendefilters einen vorgegebenen Wert nicht überschreiten darf, ist das Filter schließlich auch in der Lage, diese Leistung spektral günstig zu verteilen.

Die Übertragungsstrecke wird im allgemeinen Tiefpaßcharakter aufweisen, wie z. B. ein Kabel. Oft ist es jedoch erforderlich, den Datenstrom über einen Leitungsübertrager mit endlicher unterer Grenzfrequenz einzuspeisen. Dies läßt sich durch eine Übertragungsstrecke mit Bandpaßcharakter simulieren, falls der Übertrager nicht bereits in das Sendefilter mit einbezogen wurde.

Als Fremdstörung wird in den Kapiteln 5+6 und in einem Teil der Beispiele in Kap. 7 am Empfängereingang additiv eingekoppeltes Rauschen berücksichtigt. Als Rauschquelle wird der Eingangswiderstand des ersten Verstärkers im Empfänger angesehen. Daher kann für das Rauschen näherungsweise eine Gaußsche Amplitudendichteverteilung mit linearem Mittelwert Null und konstanter spektraler Leistungsdichte N_0 angenommen werden. Weitere Fremdstörungen, wie Klirren, Nebensprechen oder Impulsgeräusche lassen sich in das gewählte Modell des Übertragungssystems grundsätzlich einbeziehen.

Dem Empfangsfilter kommt insofern besondere Bedeutung zu, als es zwei gegensätzlichen Forderungen zu genügen hat. Einerseits sollte es zusammen mit dem Sendefilter zur Impulsformung beitragen und aus diesem Grund eine ausreichend große Bandbreite aufweisen. Andererseits muß es die Rauschstörung möglichst gut unterdrücken und daher eine kleine Bandbreite haben. Die in Kap. 7 behandelten Beispiele zeigen, wie hier durch ein Optimierungsverfahren günstige Kompromisse gefunden werden können.

Der Entscheider vergleicht in den vom Taktgenerator bestimmten Abtastzeitpunkten t_A das Signal $x_4(t_A)$ mit den voreingestellten Schwellwertamplituden Q_i . Es wird angenommen, daß der Amplitudenvergleich unabhängig von der absoluten Größe von $x_4(t_A)$ exakt durchgeführt werden kann und daß die Schwellen selbst nicht toleranzbehaftet sind.

Die Taktableitung wird als ideal vorausgesetzt, d. h. die für den Entscheidungsvorgang benötigten Abfragezeitpunkte werden so bestimmt, daß die Fehlerwahrscheinlichkeit minimal wird.

Die Decodierung erfolgt entsprechend der unterschiedlichen Codierung für PR-Codes und ML-Codes in verschiedener Weise. In jedem Fall ist jedoch dem Amplitudenbereich zwischen den Schwellen Q_{i-1} und Q_i das Niveau L_i zugeordnet, sodaß die vom Entscheider kommende Information $Q_{i-1} < x_4(t_A) < Q_i$ als $x_4(t_A) \hat{=} L_i$ interpretiert wird. Bei ML-Codierung wird dann dem Niveau L_i eine bestimmte Bitkombination zugeordnet. Bei PR-Codierung erfolgt die Zuordnung $L_i \hat{=} -1$, falls v gerade ist, andernfalls $L_i \hat{=} +1$; diese bitweise Decodierung ist nur im Zusammenhang mit der erwähnten Vorcodierung möglich. Spezielle redundanzausnutzende Verfahren zur Entscheidung und Decodierung ("maximum likelihood detection", [9]-[12]) werden hier des i. a. großen Aufwandes im Empfänger wegen nicht in Betracht gezogen.

In der Senke wird die den Decodierer verlassende binär-bipolare Bitfolge ausgewertet.

Um eine möglichst fehlerfreie Datenübertragung zu gewährleisten, d. h. bei gegebenem Störabstand am Empfängereingang die maximal zugelassene Fehlerwahrscheinlichkeit nicht zu überschreiten, sind an das Signal $x_4(t)$ am Ausgang des Empfangsfilters zwei Forderungen zu stellen. Zum einen muß

das Auge geöffnet sein, zum anderen darf der vom Rauschen herrührende Störanteil nicht zu groß sein. Um nicht nur die genannten qualitativen sondern auch quantitative Aussagen zu ermöglichen, befaßt sich Kap. 4 mit der Berechnung des Augendiagramms ("eye pattern"), Kap. 5 mit der Bestimmung von Signal- und Störleistung und Kap. 6 mit der Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit.

Zwar ist die Augenberechnung für ML-Codierung ([13]-[15]) und einzelne PR-Codes ([13],[16]) bekannt, sie wird hier jedoch mit dem Ziel aufgegriffen, ein für beide Codierungsarten einheitliches Berechnungsverfahren zu entwickeln.

Um den Störabstand am Empfängereingang festlegen und die Amplitudendichteverteilung des Rauschens am Entscheidereingang angeben zu können, werden in Kap. 5 die mittlere Signalleistung am Ausgang der Übertragungsstrecke und die mittlere Rauschleistung im Entscheiderpunkt bestimmt.

Mit Hilfe des Augendiagramms und der Störleistung kann dann in Kap. 6 die Fehlerwahrscheinlichkeit berechnet werden. Es wird dabei unterschieden zwischen der auf den inneren Augenrand bezogenen "worst-case"- und der mit dem Augendiagramm verknüpften mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit. Zwei Verfahren zur Bestimmung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit werden behandelt. Bei der direkten Methode ("exhaustive method") wird die Überschreitungswahrscheinlichkeit bzgl. jeder im Abtastzeitpunkt möglichen Signalamplitude herangezogen; die Momentenmethode verwendet die Verteilung der Signalamplituden im Abtastzeitpunkt ([17]-[20]).

Kap. 7 behandelt Beispiele für die Optimierung von Datenübertragungssystemen; die Optimierungskriterien werden mit Hilfe der Beziehungen für Auge und Fehlerwahrscheinlichkeit formuliert. Dabei interessiert insbesondere, welche Filtercharakteristiken sich ergeben, wenn Code, Bit- oder Übertragungsrate und Filteraufwand vorgegeben wurden.

3. Codierung

3.1. Aufgabe der Codierung und Code-Arten

Die mit der Codierung zusammenhängenden Probleme stellen ein umfangreiches Teilgebiet der Nachrichtenverarbeitung dar. Sie werden mit den Mitteln der Informationstheorie behandelt; eine ausführliche zusammenfassende Darstellung findet man in [21]. Bei den vorliegenden Untersuchungen steht der Gesichtspunkt im Vordergrund, wie die Codierung in den Dienst der Nachrichtenübertragung gestellt werden kann. Insbesondere handelt es sich um den folgenden Grundgedanken: Es sei gegenüber dem von der Quelle abgegebenen binär-bipolaren Signal für die Übertragung eine Erhöhung der Zahl der Amplitudenstufen zugelassen. Diese Möglichkeit kann in unterschiedlicher Hinsicht genutzt werden. Entweder läßt sich unter Wahrung der Redundanzfreiheit bei gleichbleibender Bitrate der Bandbreitebedarf verringern oder bei gleichbleibendem Bandbreitebedarf die Bitrate erhöhen (ML-Codierung). Eine andere Möglichkeit besteht darin, auf Kosten einer gewissen Redundanz ein Signal zu erzeugen, dessen Leistungsspektrum an die zur Verfügung stehende Übertragungsstrecke angepaßt ist (PR-Codierung). Bei der vorliegenden Arbeit liegt das Schwergewicht auf der PR-Codierung. Daneben wird auch die ML-Codierung behandelt, einerseits um auf prinzipielle Unterschiede innerhalb der Klasse der mehrstufigen Codes hinweisen zu können und andererseits deshalb, weil die Ableitungen in den Kapiteln 4 bis 6 bei geeigneter Interpretation für beide Codierungsarten gelten.

3.2. Redundanzfreie Mehrstufencodierung (ML-Codierung)

Bei dieser blockweisen Codierung ordnet der Codierer jeweils einer Kombination aus k Binärzeichen ("Block") eine Amplitudenstufe zu. Dabei kann der Block entweder aus

Zeichen einer einzigen oder verschiedener Datenfolgen zusammengesetzt sein. Beide Fälle sind in Bild 3.1 an je einem Beispiel für $k=2$ dargestellt. Bild 3.1 a) zeigt die Codierung einer Folge aus 14 Bits. Man erkennt, wie die Erhöhung der Stufenzahl von zwei auf vier unter Beibehaltung der Bitrate zur Halbierung der Schrittgeschwindigkeit ausgenutzt wird. Damit ist eine Reduzierung des Bandbreitebedarfs um den Faktor zwei verbunden. Bei der Codierung der beiden Datenfolgen zu je 14 Bits in Bild 3.1 b) wird dagegen die Verdoppelung der möglichen Stufenzahl zur Zusammenfassung zweier Bitströme der Bitrate $\frac{1}{T}$ zu einem Bitstrom der doppelten Bitrate verwendet. Der Bandbreitebedarf ist dabei nicht größer als der jedes einzelnen Bitstromes am Codierereingang.

Die Zuordnung zwischen Zeichenkombination und Amplitudenstufe läßt sich mathematisch durch einen Codieroperator $\mathcal{L}_{ML}$ verbunden mit einer Zuordnungstabelle beschreiben. In dem Bild 3.1 a) zugrundeliegenden Fall erhält man für beliebiges k

$$\mathcal{L}_{ML} \left\{ \langle b_1 \cdot \delta_1(t), \dots, b_{l+k-1} \cdot \delta_{l+k-1}(t) \rangle \right\} = c_{l+k-1} \cdot \delta_{l+k-1}(t) \quad (3.1)$$

$l, k \text{ ganzzahlig}$

Die Koeffizienten c_{l+k-1} sind aus einem Vorrat von 2^k verschiedenen Amplitudenstufen ("Niveaus") L_i ($i=0, \dots, 2^k-1$) zu nehmen unter Beachtung der Nebenbedingung, daß gleichen Bitkombinationen auch stets das gleiche Niveau zuzuordnen ist. Grundsätzlich kann jede umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller 2^k möglichen Bitkombinationen aus je k Bits auf eine Menge von Amplitudenstufen mit gleicher Anzahl von Elementen die Zuordnung vermitteln. Üblicherweise liegen die Niveaus jedoch symmetrisch zu Null und haben untereinander jeweils gleichen Abstand. Ferner ist es im

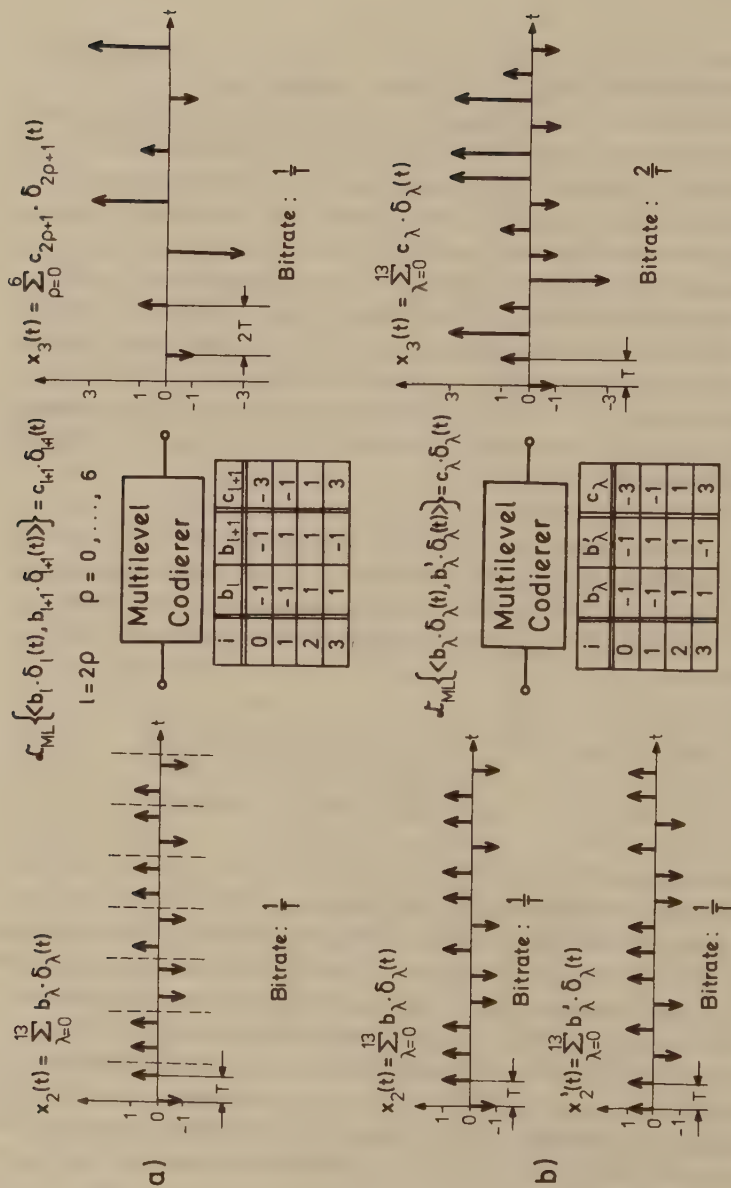


Bild 3.1: Beispiele für redundanzfreie Mehrstufencodierungen mit $k=2$

Hinblick auf die Fehlerwahrscheinlichkeit (vgl. Kap. 6) sinnvoll, die Zuordnungstabelle derart aufzubauen, daß sich Bitkombinationen, die zu benachbarten Niveaus gehören, nur in einem Bit unterscheiden. So erhält man z. B. das in Tabelle 3.1 dargestellte Zuordnungsschema.

i	b_l	b_{l+1}		b_{l+k+2}	b_{l+k+1}	L_i
0	-1	-1		-1	-1	$-2^k + 1$
1	-1	-1		-1	1	$-2^k + 3$
2	-1	-1		1	1	$-2^k + 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2^k - 1$	1	1		1	1	$2^k - 1$

Tabelle 3.1: Mögliches Zuordnungsschema bei redundanzfreier Mehrstufencodierung

i ist der Laufindex für die 2^k möglichen Niveaus L_i . Analoge Definitionen für den Codiereroperator und das Zuordnungsschema können für die erwähnte Zusammenfassung mehrerer Bitströme zu einem einzigen angegeben werden.

Einige allgemeine Bemerkungen sollen das bisher über die ML-Codierung Gesagte ergänzen. Waren die Zeichen vor dem Codierer statistisch unabhängig, so besteht auch die codierte Zeichenfolge aus statistisch unabhängigen Zeichen. Da vor dem Codierer jede beliebige Zeichenfolge aus ± 1 möglich war, ist auch nach dem Codierer jede beliebige Folge der Amplitudenstufen möglich. Insbesondere ist also zu jeder Taktzeit der direkte Übergang in jedes vereinbarte Niveau erlaubt.

3.3. Partial-Response-Codierung (PR-Codierung)

Zunächst wird erläutert, welche Überlegungen zur Entwicklung der PR-Codes führten (Abschnitt 3.3.1). Abschnitt 3.3.2 geht auf die beiden bisher bekannt gewordenen Realisierungsverfahren ein, Abschnitt 3.3.3 behandelt den Codierer. Der folgende Abschnitt erwähnt kurz eine Klasse optimaler Übertragungskanäle für Übertragungsraten, die kleiner sind als die Nyquist rate ("raised-cosine"-Tiefpässe). Nach einigen Bemerkungen zur Klassifizierung der PR-Codes in Abschnitt 3.3.5 werden in Abschnitt 3.3.6 drei PR-Codes ausgewählt und charakterisiert, die in den folgenden Kapiteln neben dem Binär-bipolar-Code als Beispiele zur Verfügung stehen sollen. Der letzte Abschnitt behandelt die Vorcodierung; sie ist zwar für die Berechnung von Auge und Fehlerwahrscheinlichkeit unwesentlich, spielt aber für den Entscheidungs- und Decodierungsprozeß eine wichtige Rolle.

3.3.1. Grundlagen, erläutert am Beispiel einer Übertragung mit der Nyquist rate

Im folgenden wird der Grundgedanke der PR-Codierung binärer Quellensignale nachvollzogen, soweit dies zum Verständnis der Arbeit notwendig ist. Dabei müssen gelegentlich Begriffe als bekannt vorausgesetzt werden (z. B. Auge, Schrittfehler), die erst in späteren Abschnitten definiert werden.

Wir gehen aus von einem idealisierten Tiefpaßkanal der Bandbreite ω_g . Die Übertragungsfunktion $\hat{H}(j\omega)$ dieses Kanals läßt sich allgemein in der Form

$$\hat{H}(j\omega) = \begin{cases} \sum_{v=-\infty}^{\infty} d_v \cdot e^{-j\omega(\tau+v \cdot T)} & \text{für } |\omega| < \omega_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2)$$

mit der Grundlaufzeit τ darstellen (siehe etwa [22]).

Mit der Abkürzung

$$\text{si}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (3.3)$$

ist die Impulsantwort $\hat{h}(t)$ des Kanals durch

$$\hat{h}(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} d_v \cdot \text{si} [\omega_g(t - v \cdot T - \tau)] \cdot \frac{\omega_g}{\pi} \quad (3.4)$$

gegeben. Wählt man die Grenzfrequenz ω_g speziell gleich der Nyquistfrequenz ω_N mit

$$\omega_N = \frac{\pi}{T} \quad , \quad (3.5)$$

so lassen sich bei rein binärer Übertragung (zwei Amplitudenstufen) über den durch Gl.(3.2) beschriebenen Kanal Daten maximal mit der Übertragungsrate $\ddot{U}_N = 2 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$ (Nyquist rate) übertragen. Dieser Fall wird im folgenden häufig zum Vergleich herangezogen, daher werden für Übertragungsfunktion und Impulsantwort des entsprechenden Übertragungskanals eigene Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} H^{(N)}(j\omega) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \hat{H}(j\omega) \Big|_{\omega_g = \omega_N} \\ h^{(N)}(t) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \hat{h}(t) \Big|_{\omega_g = \omega_N} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Im einfachsten Fall ist nur ein einziger der Koeffizienten d_v von Null verschieden und man erhält mit $d_0=1$ die Übertragungsfunktion des sog. "idealen Tiefpasses"

$$H^{(0)}(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \text{für } |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

Dessen Impulsantwort

$$h^{(0)}(t) = \frac{\omega_N}{\pi} \cdot \text{si} [\omega_N(t-\tau)] \quad (3.8)$$

ist im Zeitpunkt $t=\tau$ interferenzfrei, erfüllt also in diesem Zeitpunkt die erste Nyquistbedingung; diese lautet in allgemeiner Form

$$y(t+\rho \cdot T) = \begin{cases} 1 & \text{für } \rho = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \rho \text{ ganzzahlig} \quad (3.9)$$

Der durch Gl.(3.7) beschriebene Übertragungskanal erlaubt es theoretisch, Daten mit der Übertragungsrate $\ddot{U} = \frac{1/T}{\omega_N/(2\pi)} = 2 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}} = \ddot{U}_N$ und mit dem Augenfehler $\Delta\alpha = 0$ binär zu übertragen. Der Kanal ist allerdings nicht realisierbar, da er das Paley-Wiener-Kriterium nicht erfüllt (siehe z.B.[22], S.197). Aber selbst der exakte Frequenzgang wäre für praktische Anwendungen gar nicht brauchbar, da das Auge hier zu einem senkrechten Strich entartet (relativer Schrittfehler $\Delta T = 1$, [15]) und somit im Empfänger eine unendlich genaue Einhaltung des Abtastzeitpunktes $t_A = \tau$ erforderlich wäre.

Das Hauptanliegen bei der Entwicklung der PR-Codes war es nun, die Nyquistrate mit einem auch in der Praxis realisierbaren Übertragungskanal und einem Schrittfehler $\Delta T < 1$ zu erreichen. Wie noch gezeigt wird, ist dies möglich, wenn man für die Übertragung mehr als zwei Amplitudenstufen zuläßt. Im Rahmen der PR-Codierung betrachtet man dazu Übertragungsfunktionen $H^{(N)}(j\omega)$ für den Spezialfall endlich vieler und überdies ganzzahliger Koeffizienten d_v . Durch geeignete Wahl dieser Koeffizienten lassen sich günstige Frequenzgänge erzeugen ([24],[25]).

Sei nun n die Zahl der Koeffizienten d_v , die von Null verschieden sein können. Ferner denken wir uns in $H^{(N)}(j\omega)$ die Übertragungsfunktionen von Codierer, Sendefilter, Übertragungsstrecke und Empfangsfilter für den Fall $\ddot{U}=\ddot{U}_N$ zusammengefaßt ¹⁾:

$$H^{(N)}(j\omega) = H_C(j\omega) \cdot H_{SF}^{(N)}(j\omega) \cdot H_{\ddot{U}S}(j\omega) \cdot H_{EF}^{(N)}(j\omega) \quad (3.10)$$

Die binäre Zeichenfolge $x_1(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot \delta_{\lambda}(t)$ am Eingang des Systems mit der Übertragungsfunktion $H^{(N)}(j\omega)$ führt am Ausgang zu einer Überlagerung der Impulsantworten $h_{\lambda}^{(N)}(t)$, wie in Bild 3.2 angedeutet.

$$\begin{aligned} x_1(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot \delta_{\lambda}(t) & \quad \circ \quad \boxed{H^{(N)}(j\omega)} \quad \circ \quad x_4(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot h_{\lambda}^{(N)}(t) \\ & = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot \text{si}[\omega_N(t - T - (\lambda + v) \cdot T)] \end{aligned}$$

Bild 3.2: Zur Übertragung binärer Daten a_{λ} durch ein System mit der Übertragungsfunktion $H^{(N)}(j\omega)$ gemäß Gl.(3.6) mit $d_v=0$ für $v < 0$ und $n \leq v < \infty$.

In den Abtastzeitpunkten

$$t_{Ap} = T + \rho \cdot T, \quad \rho \text{ ganzzahlig} \quad (3.11)$$

1) Der Vorcodierer kann in diesem Zusammenhang als transparent angesehen werden: $H_{VC}(j\omega) \equiv 1$.

ist

$$\begin{aligned}
 h_{\lambda}^{(N)}(t_{Ap}) &= \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot \text{si} [\omega_N(\tau + \rho \cdot T - \tau - (\lambda + v) \cdot T)] \\
 &= \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot \text{si} [\omega_N(\rho - \lambda - v) \cdot T] \\
 &= \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot \text{si} [\pi (\rho - \lambda - v)] \\
 &= d_{\rho - \lambda}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

und die Zeitantwort $x_4(t)$ am Ausgang des Empfangsfilters

$$x_4(t_{Ap}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot h_{\lambda}^{(N)}(t_{Ap}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot d_{\rho - \lambda} \tag{3.13}$$

Dabei können nur die Koeffizienten $d_{\rho - \lambda}$ mit $0 \leq \rho - \lambda \leq n-1$ von Null verschieden sein. Gemäß Gl.(3.13) läßt sich die Datenfolge $x_4(t)$ in den Abtastzeitpunkten t_A als Linearkombination der Koeffizienten $d_{\rho - \lambda}$ darstellen. Es können also mehrere diskrete Amplitudenstufen auftreten und das Empfangssignal $x_4(t_{Ap})$ hängt von den n gesendeten Daten a_{λ} mit $\rho - n + 1 \leq \lambda \leq \rho$ ab. Bei der Decodierung muß entweder diese Abhängigkeit berücksichtigt oder durch eine geeignete Vorcodierung dafür gesorgt werden, daß $x_4(t_{Ap})$ nur von a_{ρ} abhängt.

Eine wichtige von den Koeffizienten d_v abhängige Eigenschaft der meisten PR-Codes besteht darin, daß im Gegensatz zur ML-Codierung nicht zu jeder Taktzeit ein Übergang zwischen zwei beliebigen -prinzipiell erlaubten- Niveaus möglich ist. Dies hat vor allem auf die Augenbreite und damit auf den Schrittfehler einen günstigen Einfluß, da der große Schrittfehler bei ML-Codierung durch Übergänge zwischen den äußersten Niveaus hervorgerufen wird. Eine Diskussion dieser Zusammenhänge findet sich in [26].

3.3.2. Zwei Realisierungsverfahren

Dem Bild 2.1 liegt eine Realisierung der PR-Codierung zugrunde, bei der die Codierung vollständig auf der Sendeseite erfolgt und der Codierer einen getrennten Block darstellt; diese Realisierung wird im weiteren als Realisierung 1 bezeichnet. Daneben gibt es eine andere Realisierungsform (Realisierung 2), bei der die Übertragungsfunktion $H^{(N)}(j\omega)$ nach Gl.(3.10) direkt realisiert wird. Hierbei erfolgen also Codierung und Filterung gemeinsam, gewissermaßen verteilt auf Sender und Empfänger. Die Zeichenfolge $x_3(t)$ am Eingang des Sendefilters ist hier ein binäres Signal. Realisierung 1 wird z. B. im PCM-System PCM 30 angewendet, Beispiele für die Anwendung der Realisierung 2 finden sich in [27]-[29].

Solange $H^{(N)}(j\omega)$ als Ganzes betrachtet werden kann, solange also nicht, wie etwa bei der Einbeziehung von Rauschen, eine Aufteilung in Sende- und Empfangsseite nötig ist, sind beide Realisierungsverfahren natürlich äquivalent. Daher brauchen sie z. B. für die Berechnung des Augendiagramms im Entscheidungspunkt prinzipiell nicht unterschieden zu werden. Wenn die Ableitungen im folgenden dennoch hauptsächlich für Realisierung 1 erfolgen, dann nur deshalb, weil sie dadurch klarer werden.

Im Zusammenhang mit der Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit in Kap. 6 werden die Unterschiede zwischen beiden Realisierungen nochmals diskutiert.

3.3.3. Der Codierer

Der PR-Codierer ordnet jedem einzelnen Zeichen $b_\lambda \cdot \delta_\lambda(t)$ in der vom Vorcodierer abgegebenen binären Folge $x_2(t)$ ein neues Zeichen $b_\lambda \cdot g_\lambda(t)$ in $x_3(t)$ zu.

In Anlehnung an die Definition des Operators $\mathcal{L}_{ML}$ in Abschnitt 3.2 läßt sich der PR-Codierer durch einen Codiereroperator $\mathcal{L}_{PR}$ charakterisieren:

$$\mathcal{L}_{PR}\{b_\lambda \cdot \delta_\lambda(t)\} = b_\lambda \cdot g_\lambda(t) = b_\lambda \sum_{v=\lambda}^{\lambda+n-1} d_v \cdot \delta_v(t) \quad (3.14)$$

$$g_\lambda(t) = g(t - \lambda \cdot T) \quad , \quad g(t) = g_0(t) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot \delta_v(t)$$

d_v ganzzahlig

$g(t)$ soll als PR-Einzelzeichen und die d_v als PR-Koeffizienten bezeichnet werden.

Die wesentlichen Unterschiede zur ML-Codierung bestehen darin, daß erstens nicht block- sondern bitweise codiert wird und zweitens sich das PR-Einzelzeichen $g(t)$ über mehrere Taktzeiten erstreckt.

Aus Gl.(3.14) erkennt man unmittelbar, daß sich der Codierer in Form eines Transversalfilters realisieren läßt:

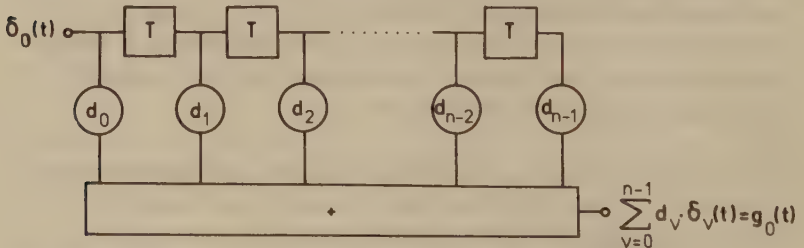


Bild 3.3: Mögliche Realisierung des partial-response-Codierers

Damit ist auch die Übertragungsfunktion $H_C(j\omega)$ des Codierers gegeben (vgl. z.B. [30]):

$$H_C(j\omega) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot e^{-jv\omega T} \quad (3.15)$$

Bild 3.4 zeigt als Beispiel die Codierung einer Datenfolge aus 14 Bits für einen typischen Vertreter der PR-Codes. Es handelt sich um den später noch eingehend behandelten Code "Klasse 4, $n=3$ ".

3.3.4. Übertragung mit einer kleineren als der Nyquistrate

Die Betrachtungen zur Datenübertragung mit Hilfe von PR-Codes in Abschnitt 3.3.1 bezogen sich auf den Spezialfall einer Übertragung mit der Nyquistrate. Aus den Gln.(3.6), (3.7) und (3.15) folgt, daß die Übertragungsfunktion $H^{(N)}(j\omega)$ in diesem Fall durch

$$H^{(N)}(j\omega) = H_C(j\omega) \cdot H^{(0)}(j\omega) \quad (3.16)$$

gegeben ist. Es gibt jedoch PR-Codes, bei denen wie im Fall der binär-bipolaren Codierung nur $\ddot{U} < \ddot{U}_N$ sinnvoll ist, wenn der Schrittfehler $\Delta T < 1$ bleiben soll. Ein bekannter Code mit dieser Eigenschaft ist der Pseudoternär-code (vgl. Bild 4.6). Um ein vollständig geöffnetes Auge zu erreichen, muß bei Übertragungsraten $\ddot{U} < \ddot{U}_N$ anstelle des durch $H^{(0)}(j\omega)$ beschriebenen Übertragungskanal eine Filtercharakteristik derart gewählt werden, daß die erste Nyquistbedingung (Gl.(3.9)) erfüllt ist. Filter mit dieser Eigenschaft sind z.B. Tiefpässe mit einem innerhalb einer gewissen Umgebung der Nyquistfrequenz ω_N punktsymmetrischen Verlauf des Betrages der Übertragungsfunktion und linearer Phase ("Nyquistfilter"). Eine besonders ausführlich untersuchte Klasse von Filtern dieses Typs stellen die sog. "raised-cosine-" Tiefpässe dar ([13], [31]) mit

$$|H^{(N)}(j\omega)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_N(1-\gamma) \\ \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \sin \left[\frac{T}{2\gamma} (\omega - \omega_N) \right] \right\} & \omega_N(1-\gamma) \leq |\omega| \leq \omega_N(1+\gamma) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.17)$$

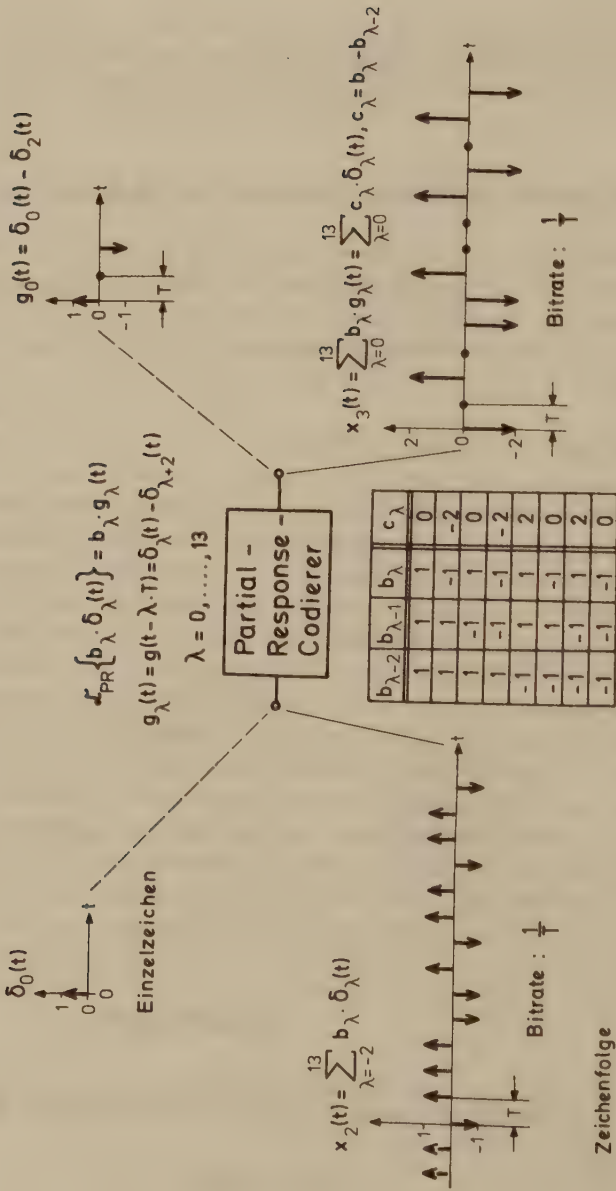


Bild 3.4: Beispiel einer Partial-Response-Codierung ("Klasse 4, n=3")

und linearer Phase. Dabei ist der "roll-off"-Faktor γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) ein Maß für die Flankensteilheit. $\gamma=0$ ergibt den "idealen Tiefpaß" mit der Übertragungsfunktion $H^{(0)}(j\omega)$ und der Grenzfrequenz ω_N (Gl.(3.7)), $\gamma=1$ den sog. "full-raised-cosine"-Tiefpaß mit der Grenzfrequenz $2 \cdot \omega_N$. Für einige Werte von γ ist der Verlauf von $|H^{(\gamma)}(j\omega)|$ in Bild 3.5 angegeben.

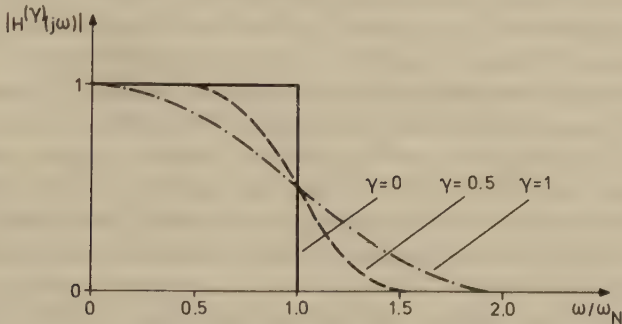


Bild 3.5: "raised-cosine"-Tiefpässe mit unterschiedlichen roll-off-Faktoren γ .

3.3.5. Zur Klassifizierung des PR-Codes

Der erstmalig von Lender [32] angewendete Duobinär-code wurde von Kretzmer [24] als Spezialfall der PR-Codes erkannt. In [24] wird für einige dieser Codes eine Klassifizierung der Form "PR-Code Klasse A, $n=B$ " vorgenommen. Die Klassennummer A ($A=1, \dots, 5$) hat keine mathematische Bedeutung, n ist die Anzahl der PR-Koeffizienten d_v . Eine tabellarische Übersicht und teilweise Erweiterung der Zahl der zu einer Klasse zu zählenden Codes findet sich in [33]. Die Codes innerhalb einer Klasse haben gewisse gemeinsame Eigenschaften. So sind die d_v in Klasse 1 alle gleich, in Klasse 3 hat $g(t)$ eine dreieckförmige

Einhüllende. Ferner enthalten die Klassen 1-3 Codes, deren Leistungsspektrum bei $\omega=0$ einen endlichen Wert aufweist, während die spektrale Leistungsdichte der Codes aus den Klassen 4 und 5 bei $\omega=0$ eine Nullstelle hat. Bei allen Codes hat der Betrag der Codiererübertragungsfunktion $H_C(j\omega)$, abgesehen von einer evtl. bei $\omega=0$ vorhandenen, die erste Nullstelle bei $\omega \leq \omega_N$. Daher läßt sich z. B. der Pseudoternär-code, dessen Bandbreitebedarf dem des Binär-codes vergleichbar ist, nicht in eine der fünf bisher vorgeschlagenen Klassen einordnen. Auch sonst wird dieser Code nur gelegentlich als PR-Code bezeichnet ([2]). Die in den folgenden Kapiteln behandelten Verfahren zur Berechnung von Auge und Fehlerwahrscheinlichkeit sind jedoch unabhängig von der Klasseneinteilung; sie gelten für alle Codes, deren Codierer-Übertragungsfunktion $H_C(j\omega)$ sich in der durch Gl.(3.15) gegebenen Form mit ganzzahligen Koeffizienten d_v darstellen läßt. Der Verfasser hält es für zweckmäßig, die Bezeichnung partial-response-Code auf jeden Code mit dieser Eigenschaft anzuwenden. Damit wird zwanglos auch der Pseudoternär-code erfaßt.

3.3.6. Code-Auswahl

Um bei einem gegebenen Datenübertragungsproblem den günstigsten Übertragungscode herauszufinden, sind i. a. umfangreiche Untersuchungen erforderlich, die sowohl technische als auch wirtschaftliche Überlegungen beinhalten. Dabei müssen einerseits Code-spezifische Eigenschaften, wie z. B. Stufenzahl, Bandbreitebedarf, Eignung für die Takt-rückgewinnung und andererseits Kanal-spezifische Eigenschaften, wie etwa die zu erwartenden linearen und nicht-linearen Verzerrungen sowie Rauschstörungen berücksichtigt werden. Die in Kap. 4-6 mitgeteilten Verfahren zur Berechnung von Augendiagramm und Fehlerwahrscheinlichkeit sollen dazu beitragen, insbesondere den Rechenaufwand bei derartigen Untersuchungen zu verringern. Um die Anwendungsmöglichkeiten zu demonstrieren, wurden in die getroffene

Code-Auswahl neben dem Binär-bipolar-Code häufiger verwendete PR-Codes einbezogen. Zugleich mit der Angabe der ausgewählten Codes werden andere aus der Literatur für den gleichen Code bekannte Bezeichnungen und die in der vorliegenden Arbeit verwendete Abkürzung genannt.

Code I: Binär-bipolar-Code.

Code II: Duobinär-Code (PR-Code Klasse 1, $n=2$).

Code III: Pseudoternär-Code (Bipolarcode 1. Ordnung, AMI-Code).

Code IV: PR-Code Klasse 4, $n=3$ (Bipolarcode 2. Ordnung [2], Modifizierter Duobinär-Code [26]).

Die Codes unterscheiden sich einerseits durch den Bandbreitenbedarf des Amplitudenspektrums des PR-Einzelzeichens $g(t)$ (entspricht dem Betrag von $H_C(j\omega)$) und andererseits durch die Tatsache, ob dieses Amplitudenspektrum bei $\omega=0$ eine Nullstelle aufweist oder nicht. Wegen der Beziehung zwischen Amplituden- und Leistungsspektrum (vgl. Kap. 5) können die Unterscheidungsmerkmale auch auf die spektrale Leistungsdichte bezogen werden. Im Hinblick auf den Bandbreitenbedarf wurden ebenfalls zwei Gruppen von Codes unterschieden. In der einen Gruppe liegt die erste Nullstelle des Leistungsspektrums, sieht man von einer Nullstelle bei $\omega=0$ ab, bei ω_N (Codes II und IV), in der anderen bei $2\cdot\omega_N$ (Codes I und III).

Bild 3.6 zeigt als Übersicht über wesentliche Kenngrößen im Zeit- und Frequenzbereich für jeden der ausgewählten Codes das PR-Einzelzeichen und die mittlere spektrale Leistungsdichte des codierten Signals $x_3(t)$. Um den Realisierungsmöglichkeiten Rechnung zu tragen, wurden dabei PR-Einzelzeichen $g^{(r)}(t)$ zugrundegelegt, die sich nicht wie $g(t)$ aus einer Folge von Dirac-Impulsen $\delta_V(t)$ zusammensetzen, sondern aus einer entsprechenden Folge von Rechteckzeichen $r_V(t)$ der Dauer T . Es gilt

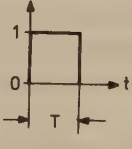
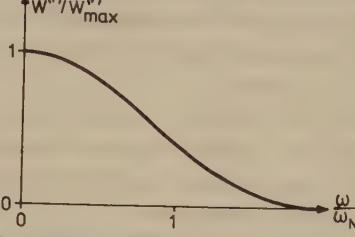
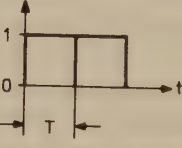
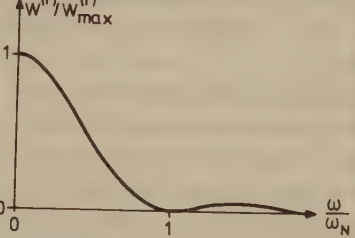
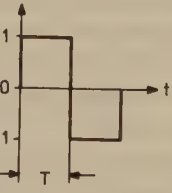
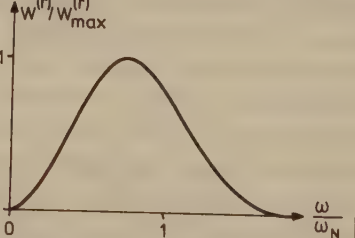
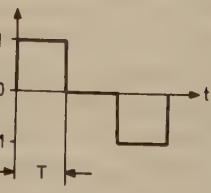
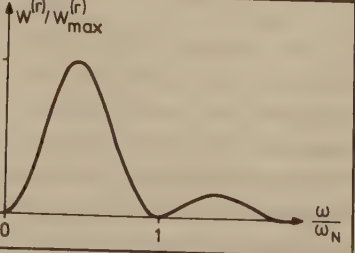
Code	Partial - Response - Einzelzeichen $g^{(r)}(t) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot r_v(t)$	Mittlere spektrale Leistungsdichte des codierten Signals $x_3^{(r)}(t)$ $W^{(r)}(\omega) = \frac{1}{T} \cdot G^{(r)}(j\omega) ^2$
I Binär - bipolar	 $n=1: d_0 = 1$	
II Duobinär	 $n=2: d_0 = d_1 = 1$	
III Pseudo - ternär	 $n=2: d_0 = 1, d_1 = -1$	
IV Partial - Response Klasse 4, $n=3$	 $n=3: d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = -1$	

Bild 3.6: Zur Charakterisierung der ausgewählten Codes

$$g^{(r)}(t) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot r(t-v \cdot T) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot r_v(t) \quad (3.18)$$

mit  (3.19)

Sei $r(t)$ die Impulsantwort eines Filters mit der Übertragungsfunktion $R(j\omega)$, dann kann man $g^{(r)}(t)$ auffassen als Impulsantwort eines modifizierten PR-Codierers mit der Übertragungsfunktion

$$H_C^{(r)}(j\omega) \stackrel{\text{Def.}}{=} R(j\omega) \cdot H_C(j\omega) \quad (3.20)$$

Im Vorgriff auf die Berechnung der Leistungsspektren $W^{(r)}(\omega)$ in Kap. 5 wurden deren Verläufe in das Bild 3.6 aufgenommen. In Kap. 5 wird gezeigt, daß sich $W^{(r)}(\omega)$ wie im Bild angegeben aus $G^{(r)}(j\omega)$, der Fouriertransformierten von $g^{(r)}(t)$, ergibt.

Während Übertragungssysteme, in denen die Codes I und III angewendet werden, ausreichend bekannt sind und die Anwendung des Codes II ([26],[32]) bereits erwähnt wurde, soll darauf hingewiesen werden, daß auch der Code IV schon mehrfach als Übertragungscode in Einseitenband-Datenübertragungssystemen Verwendung fand ([27]-[29]).

3.3.7. Die Vorcodierung

Wie in Abschnitt 3.3.1 (Gl.(3.13)) gezeigt wurde, hängt das Signal $x_4(t)$ am Entscheidungseingang in den Abfragezeitpunkten t_{Ap} von den n gesendeten Daten a_λ mit $\rho-n+1 \leq \lambda \leq \rho$ ab.

Setzt man zur Abkürzung in diesem Abschnitt

$$x_{\rho}(t_{A\rho}) \stackrel{\text{Def.}}{=} x_{\rho} \quad , \quad (3.21)$$

so läßt sich durch die Bestimmung der Amplitude x_{ρ} nur auf die Summe $\sum_{\lambda=\rho-n+1}^{\rho} d_{\rho-\lambda} a_{\lambda}$ schließen oder mit anderen Worten: Nur mit Kenntnis der Daten a_{λ} ($\rho-n+1 \leq \lambda \leq \rho-1$) läßt sich a_{ρ} aus x_{ρ} bestimmen. Ein einmal aufgetretener Fehler kann sich daher fortpflanzen. Dies sei kurz am Beispiel $n=2$, $d_0=d_1=1$ (Code II) demonstriert. Gl.(3.13) ergibt hier

$$x_{\rho} = d_0 \cdot a_{\rho-1} + d_1 \cdot a_{\rho} = a_{\rho-1} + a_{\rho} \quad \text{bzw.} \quad a_{\rho} = x_{\rho} - a_{\rho-1} \quad (3.22)$$

Wurde $a_{\rho-1}$ ein falscher Wert zugewiesen, so wird auch a_{ρ} falsch, selbst wenn x_{ρ} richtig erkannt wurde. Es ist daher eine sog. bitweise Entscheidung erwünscht, d. h. die Möglichkeit, aus x_{ρ} unmittelbar auf a_{ρ} schließen zu können. Dies wird durch eine Vorcodierung der Daten a_{λ} erreicht, bei der durch eine geeignete rekursive modulo-2-Addition die Folge $\{a_{\lambda}\}$ in die Folge $\{b_{\lambda}\}$ umgewandelt wird. Die Vorcodierung wird hier, wie in der Literatur ([31]) üblich, für binär unipolare Folgen $\{\tilde{a}_{\lambda}\}$ und $\{\tilde{b}_{\lambda}\}$ formuliert, d. h. es gilt $\tilde{a}_{\lambda}, \tilde{b}_{\lambda} \in \{0,1\}$. Entsprechende Aussagen lassen sich in analoger Weise für bipolare Datenfolgen gewinnen, wie sie den übrigen Kapiteln der Arbeit zugrundeliegen.

Behauptung: Die bitweise Entscheidung wird durch eine modulo-2-Addition ($\oplus$) der $\tilde{a}_{\lambda}$ bzw. $\tilde{b}_{\lambda}$ mit den ganzzahligen Koeffizienten d_v des PR-Einzelzeichens $g(t)$ gemäß

$$\tilde{b}_{\rho} = \frac{1}{d_0} (\tilde{a}_{\rho} \oplus d_1 \cdot \tilde{b}_{\rho-1} \oplus \dots \oplus d_{n-1} \cdot \tilde{b}_{\rho-n+1}) \quad (3.23)$$

ermöglicht. Zum Beweis werden die beiden folgenden für die modulo-2-Addition geltenden Beziehungen verwendet:

$$\begin{aligned} d_v &\text{ kann durch } 0 \text{ (1) ersetzt werden,} \\ &\text{wenn } d_v \text{ gerade (ungerade) ist.} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 1 \oplus 1 = 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \oplus 0 = 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Wie man leicht zeigen kann, ist Gl.(3.23) identisch mit

$$\tilde{a}_\rho = d_0 \cdot \tilde{b}_\rho \oplus d_1 \cdot \tilde{b}_{\rho-1} \oplus \dots \oplus d_{n-1} \cdot \tilde{b}_{\rho-n+1} \quad (3.26)$$

Die durch eine Operation gemäß Gl.(3.23) entstehenden Daten $\tilde{b}_\lambda$ unterscheiden sich in ihren statistischen Eigenschaften nicht von den Daten $\tilde{a}_\lambda$; die Menge der möglichen Folgen $\{\tilde{a}_\lambda\}$ ist identisch mit der Menge der möglichen Folgen $\{\tilde{b}_\lambda\}$. Daher gilt Gl.(3.13) auch für die $\tilde{b}_\lambda$:

$$x_\rho = \sum_{\lambda=\rho-n+1}^{\rho} d_{\rho-\lambda} \cdot \tilde{b}_\lambda = \sum_{\lambda=\rho}^{\rho-n+1} d_{\rho-\lambda} \cdot \tilde{b}_\lambda = d_0 \cdot \tilde{b}_\rho + \dots + d_{n-1} \cdot \tilde{b}_{\rho-n+1} \quad (3.27)$$

Wir betrachten nun die Gln.(3.26) und (3.27). Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\tilde{b}_\lambda \in \{0,1\}$ und daß die Koeffizienten d_ν beliebig ganzzahlig sein können, lassen sich mit Hilfe der Gln. (3.24) und (3.25) folgende Aussagen machen:

Für gerades $d_{\rho-\lambda}$ ist das Produkt $d_{\rho-\lambda} \cdot \tilde{b}_\lambda$ stets gerade; der Beitrag zu $\tilde{a}_\rho$ in Gl.(3.26) ist gleich Null, zu x_ρ in Gl.(3.27) gerade. $\tilde{a}_\rho$ und x_ρ unterscheiden sich also infolge des Beitrags $d_{\rho-\lambda} \cdot \tilde{b}_\lambda$ um eine gerade Zahl.

Wenn $d_{\rho-\lambda}$ ungerade ist, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) $\tilde{b}_\lambda = 0$: Der Beitrag von $d_{\rho-\lambda} \cdot \tilde{b}_\lambda$ zu $\tilde{a}_\rho$ und zu x_ρ ist gleich Null.
- b) $\tilde{b}_\lambda = 1$: Durch $d_{\rho-\lambda} \cdot \tilde{b}_\lambda$ ändert $\tilde{a}_\rho$ seinen Wert um 1 mod 2, x_ρ um die ungerade Zahl $d_{\rho-\lambda}$.

Insgesamt ergibt sich daher als Folgerung: Die Differenz der Beiträge des Produktes $d_{\rho-\lambda} \cdot \tilde{b}_\lambda$ zu $\tilde{a}_\rho$ bzw. x_ρ ist stets

gerade. Da diese Feststellung jeden Summanden in Gl.(3.26) bzw. Gl.(3.27) betrifft, gilt sie jeweils auch für die ganze Summe, also ist die Differenz $x_\rho - \tilde{a}_\rho$ stets gerade. Insbesondere bedeutet das:

$$\begin{aligned} \text{Ist } x_\rho \text{ gerade, so war } \tilde{a}_\rho &= 0, \\ \text{Ist } x_\rho \text{ ungerade, so war } \tilde{a}_\rho &= 1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Durch Bestimmung des Niveaus x_ρ läßt sich also eindeutig auf $\tilde{a}_\rho$ schließen und somit ist mit Hilfe der durch Gl.(3.23) beschriebenen Vorcodierung der von der Quelle abgegebenen Daten die gewünschte bitweise Entscheidung möglich. Da sich, wie schon erwähnt, die möglichen Datenfolgen $\{\tilde{b}_\lambda\}$ am Ausgang des Vorcodierers in ihren statistischen Eigenschaften nicht von den möglichen Folgen $\{\tilde{a}_\lambda\}$ am Ausgang der Quelle unterscheiden, hat die Vorcodierung jedoch keinen Einfluß auf die in den Kapiteln 4-6 durchgeführte Berechnung von Auge und Fehlerwahrscheinlichkeit.

Ergänzend soll die Wirkungsweise der Vorcodierung wiederum am Beispiel des Codes II verdeutlicht werden. Die Vorcodierungs-Vorschrift Gl.(3.23) lautet hier

$$\tilde{b}_\kappa = \frac{1}{d_0} (\tilde{a}_\kappa \oplus d_1 \cdot \tilde{b}_{\kappa-1}) = \tilde{a}_\kappa \oplus \tilde{b}_{\kappa-1}. \quad (3.29)$$

Es seien die Daten

$$\tilde{a}_{\rho-1} = 0, \quad \tilde{a}_\rho = 1, \quad \tilde{a}_{\rho+1} = 0 \quad (3.30)$$

zu übertragen. Weiterhin sei willkürlich

$$\tilde{b}_{\rho-2} = 1. \quad (3.31)$$

Mit den Beziehungen Gl.(3.25) und Gl.(3.31) ergibt sich aus Gl.(3.29) für

$$\begin{aligned} \kappa = \rho - 1: \quad \tilde{b}_{\rho-1} &= \tilde{a}_{\rho-1} \oplus \tilde{b}_{\rho-2} = 0 \oplus 1 = 1 \\ \kappa = \rho: \quad \tilde{b}_\rho &= \tilde{a}_\rho \oplus \tilde{b}_{\rho-1} = 1 \oplus 1 = 0 \\ \kappa = \rho + 1: \quad \tilde{b}_{\rho+1} &= \tilde{a}_{\rho+1} \oplus \tilde{b}_\rho = 0 \oplus 0 = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Für die empfangenen Signalamplituden $x_{\rho-1}$, x_{ρ} und $x_{\rho+1}$ erhält man aus Gl.(3.27):

$$\begin{aligned} x_{\rho-1} &= d_0 \cdot \tilde{b}_{\rho-1} + d_1 \cdot \tilde{b}_{\rho-2} = \tilde{b}_{\rho-1} + \tilde{b}_{\rho-2} = 2 \\ x_{\rho} &= d_0 \cdot \tilde{b}_{\rho} + d_1 \cdot \tilde{b}_{\rho-1} = \tilde{b}_{\rho} + \tilde{b}_{\rho-1} = 1 \\ x_{\rho+1} &= d_0 \cdot \tilde{b}_{\rho+1} + d_1 \cdot \tilde{b}_{\rho} = \tilde{b}_{\rho+1} + \tilde{b}_{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$x_{\rho-1}$ und $x_{\rho+1}$ sind gerade, x_{ρ} ungerade. Über die Beziehung (3.28) ergeben sich also wieder die gesendeten Daten gemäß Gl.(3.30). Man prüft leicht nach, daß das Ergebnis auch für $\tilde{b}_{\rho-2} = 0$ gilt (vgl. Gl.(3.31)).

4. Impulsinterferenz und Augendiagramm

4.1. Übersicht

Die Betrachtungen in diesem Kapitel werden für die Realisierung 1 der partial-response-Codierung durchgeführt. Von den in der Systembeschreibung genannten Störungen wird hier zunächst nur die Impulsinterferenz ("intersymbol interference") berücksichtigt. Durch Aufzeichnung eines Datensignals $x(t)$ mit einem Speicheroszillographen, der mit einem ganzzahligen Vielfachen des Taktes T synchronisiert wurde, entsteht ein sog. Augendiagramm (Augenmuster, "eye pattern"). Dieses kann grundsätzlich in jedem Punkt des in Bild 2.1 dargestellten Datenübertragungssystems erstellt werden; von besonderem Interesse ist es jedoch am Entscheidereingang, da hier ja die gesendete Information wiedererkannt werden muß. Daher beziehen sich die im folgenden durchgeführten Augenberechnungen auf den Entscheiderpunkt.

Um eine sinnvolle Auswertung der gesendeten Daten zu gestatten, müssen sich bei einem realen Übertragungskanal die am Entscheidereingang in den Abtastzeitpunkten auftretenden Amplituden den bei idealem Kanal möglichen Amplitudenniveaus

zuordnen lassen. Deshalb werden diese Niveaus in Abschnitt 4.2 zunächst allgemein bestimmt. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird der Code IV als Beispiel parallel mitbehandelt. Die Berechnung der möglichen Amplituden bei realem Übertragungskanal sowie die mathematische Darstellung und Definition des Augendiagramms erfolgen in Abschnitt 4.3. Aus einer worst-case-Betrachtung des Augendiagramms ergeben sich in Abschnitt 4.4 der innere Augenrand (Auge) und die Kenngrößen des Auges, Augenfehler $\Delta\alpha$ und Schrittfehler ΔT . Anschließend werden die Augen der ausgewählten Codes sowohl speziell für Nyquist-Übertragungs-Kanäle gemäß Abschnitt 3.3.4 als auch für beliebige Übertragungskanäle berechnet. Abschnitt 4.5 zeigt für die vier Codes gemessene, d. h. mit einem Oszillographen aufgezeichnete, Augendiagramme. Die aus den Bildern abgelesenen inneren Augenränder werden mit den berechneten verglichen.

Das Blockschaltbild in Bild 4.1 zeigt in vereinfachter Form den Teil des Übertragungssystems, der den Ableitungen in den folgenden Abschnitten zugrundeliegt. Da die Vorcodierung keinen Einfluß auf die Augenberechnung hat, wurde der Vorcodierer im Bild weggelassen. Im Übertragungskanal mit der Übertragungsfunktion $H_{\text{ÜK}}(j\omega)$ sind Sendefilter, Übertragungsstrecke und Empfangsfilter zusammengefaßt:

$$H_{\text{ÜK}}(j\omega) = H_{\text{SF}}(j\omega) \cdot H_{\text{ÜS}}(j\omega) \cdot H_{\text{EF}}(j\omega) \quad (4.1)$$

Wenn die zu übertragende Datenfolge, wie in der Praxis üblich, aus Rechteckzeichen besteht, so ist dies durch einen entsprechend modifizierten Übertragungskanal mit der Übertragungsfunktion $H_{\text{ÜK}}^{(R)}(j\omega)$ zu berücksichtigen. Mit $R(j\omega)$ wie in Gl.(3.20) ist

$$H_{\text{ÜK}}^{(R)}(j\omega) = H_{\text{ÜK}}(j\omega) / R(j\omega) \quad (4.2)$$

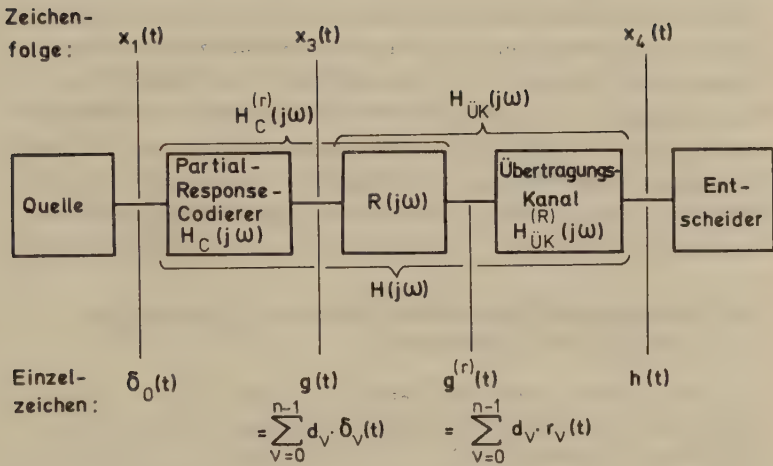


Bild 4.1: Blockschaltbild des für die Augenberechnung vereinfachten Übertragungssystems

Ferner wird analog zu der für den Spezialfall $\ddot{U} = \ddot{U}_N$ durch Gl.(3.10) gegebenen Übertragungsfunktion $H^{(N)}(j\omega)$ hier für beliebige Übertragungsraten $\ddot{U}$ die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ definiert:

$$H(j\omega) \underset{\text{Def}}{=} H_C(j\omega) \cdot H_{SF}(j\omega) \cdot H_{ÜS}(j\omega) \cdot H_{EF}(j\omega) \quad (4.3)$$

Mit den Gln.(4.1) bis (4.3) und Gl.(3.20) gilt dann der Zusammenhang

$$H(j\omega) = H_C(j\omega) \cdot H_{ÜK}(j\omega) = H_C(j\omega) \cdot R(j\omega) \cdot H_{ÜK}^{(R)}(j\omega) = H_C^{(r)}(j\omega) \cdot H_{ÜK}^{(R)}(j\omega) \quad (4.4)$$

wie auch in Bild 4.1 durch geschweifte Klammern angedeutet. Mit Hilfe der Impulsantwort $h(t)$ ²⁾ des durch $H(j\omega)$ charakterisierten Übertragungssystems kann nun im folgenden das Auge berechnet werden. $h(t)$ ist jedoch naturgemäß eine Zeitantwort, die vom Code abhängt. Um eine einheitliche Darstellungsweise zu erreichen, ist es daher zweckmäßig, das Auge auch als Funktion der Impulsantwort $h_{\dot{U}K}(t)$ ³⁾ des Übertragungskanals $H_{\dot{U}K}(j\omega)$ anzugeben; dies geschieht in Abschnitt 4.4.3.5. Aus dem gleichen Grund wird eine der Kenngrößen des Auges, der Augenfehler, auf $h_{\dot{U}K}(t)$ bezogen.

4.2. Die Amplitudenniveaus am Entscheidereingang bei idealem Übertragungskanal

Die Amplitudenniveaus oder kurz "Niveaus" am Eingang des Entscheiders werden für einen Übertragungskanal mit der Übertragungsfunktion $H_{\dot{U}K}^{(R)}(j\omega) \equiv 1$ bzw. $H_{\dot{U}K}(j\omega) = R(j\omega)$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit im Zeitpunkt t_0 mit $0 < t_0 < T$ berechnet.

Wegen der o.g. Eigenschaft des Kanals ist $h(t) \equiv g^{(r)}(t)$. Da $g^{(r)}(t) \equiv 0$ außerhalb des Bereiches $0 < t < n \cdot T$, können nur die Zeichen $g_{\lambda}^{(r)}(t)$ mit $-(n-1) \leq \lambda \leq 0$ zu den in t_0 möglichen Niveaus beitragen. Jede der 2^n möglichen Kombinationen $\langle b_{i,\lambda} \rangle = \langle b_{i,-(n-1)}, \dots, b_{i,0} \rangle$ mit $i=0, \dots, 2^{n-1}$ und $b_{i,\lambda} \in \{1, -1\}$ führt zu einem bestimmten Niveau

$$u_i(t_0) = \sum_{\lambda=-(n-1)}^0 b_{i,\lambda} g_{\lambda}^{(r)}(t_0) . \quad (4.5)$$

-
- 2) $h(t)$ ist identisch mit der Zeitantwort des Kanals $H_{\dot{U}K}(j\omega)$ ($H_{\dot{U}K}^{(R)}(j\omega)$) auf das PR-Einzelzeichen $g(t)$ ($g^{(r)}(t)$)
- 3) $h_{\dot{U}K}(t)$ ist identisch mit der Rechteckantwort des Kanals $H_{\dot{U}K}^{(R)}(j\omega)$.

Verschiedene Kombinationen $\langle b_{i,\lambda} \rangle_1$ und $\langle b_{i,\lambda} \rangle_2$ können zum gleichen Niveau führen.

In Gl.(4.5) lassen sich zwei Merkmale erkennen, die bei der praktischen Anwendung die Zahl der zu berücksichtigenden Kombinationen $\langle b_{i,\lambda} \rangle$ reduzieren.

- 1) Diejenigen $g_{\lambda}^{(r)}(t)$ mit $g_{\lambda}^{(r)}(t_0) = 0$ tragen zu den Niveaus $u_i(t_0)$ nichts bei. Wie man aus Gl.(4.6), einer ausführlicheren Schreibweise von Gl.(4.5), erkennt,

$$u_i(t_0) = \sum_{\lambda=-(n-1)}^0 b_{i,\lambda} \cdot \left(\sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot r(t_0 - (\lambda + v) \cdot T) \right) = \sum_{\lambda=-(n-1)}^0 b_{i,\lambda} \cdot d_{-\lambda} \cdot r(t_0) \quad (4.6)$$

sind die Indizes λ , für die $g_{\lambda}^{(r)}(t_0)$ verschwindet, durch die Koeffizienten d_v des Einzelzeichens $g^{(r)}(t)$ gegeben, die gleich Null sind; es ist stets $v = -\lambda$. Allgemein gilt: Sei l die Zahl der Koeffizienten d_v mit $d_v = 0$, so gibt es nur 2^{n-l} niveaubestimmende Kombinationen; jede Kombination enthält $n-l$ Elemente.

- 2) Führt eine Kombination $\langle b_{i,\lambda} \rangle$ zum Niveau $u_i(t_0)$, so liefert die Kombination $\langle \overline{b_{i,\lambda}} \rangle$, in der gegenüber $\langle b_{i,\lambda} \rangle$ die Elemente $b_{i,\lambda}$ durch $-b_{i,\lambda}$ ersetzt wurden, zum Niveau $-u_i(t_0)$.

Unter Berücksichtigung der beiden unter 1) und 2) aufgeführten Feststellungen genügt es also, von den ursprünglichen 2^n Kombinationen 2^{n-l-1} zu untersuchen, um alle wesentlich verschiedenen Amplitudenniveaus $u_i(t_0)$ zu erhalten. Zu bemerken ist allerdings, daß auch im Rahmen dieser 2^{n-l-1} Kombinationen immer noch verschiedene zum gleichen Niveau führen können.

Für den Code IV ergeben sich mit den PR-Koeffizienten $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ und $d_2 = -1$ folgende Verhältnisse:

$$g^{(r)}(t) = \sum_{v=0}^2 d_v \cdot r_v(t) = r_0(t) - r_2(t) \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} g_0^{(r)}(t_0) &= g^{(r)}(t_0) = 1 \\ g_{-1}^{(r)}(t_0) &= g^{(r)}(t_0 + T) = 0 \\ g_{-2}^{(r)}(t_0) &= g^{(r)}(t_0 + 2T) = -1 \end{aligned} \right\} 0 < t_0 < T \quad (4.8)$$

Mit den Gln.(4.5) und (4.7) erhält man

$$\begin{aligned} u_i(t_0) &= \sum_{\lambda=-2}^0 b_{i,\lambda} \cdot g_{\lambda}^{(r)}(t_0) \\ &= b_{i,-2} \cdot g_{-2}^{(r)}(t_0) + b_{i,-1} \cdot g_{-1}^{(r)}(t_0) + b_{i,0} \cdot g_0^{(r)}(t_0) \\ &= b_{i,-2} g_{-2}^{(r)}(t_0) + b_{i,0} g_0^{(r)}(t_0) \\ &= b_{i,0} - b_{i,-2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Da d_1 gleich Null ist, liefert das Zeichen $g_{-1}^{(r)}(t)$ keinen Beitrag zu den in t_0 möglichen Niveaus. Es sind also wegen $n=3$ und $l=1$ von den ursprünglich $2^3=8$ Kombinationen nur $2^{n-l-1}=2$ in Betracht zu ziehen. Unter Berücksichtigung von Gl.(4.9) ergibt sich:

$$i=1: \langle b_{1,-2}, b_{1,0} \rangle = \langle 1, 1 \rangle \rightarrow u_1(t_0) = b_{1,0} - b_{1,-2} = 1 - 1 = 0$$

$$i=2: \langle b_{2,-2}, b_{2,0} \rangle = \langle 1, -1 \rangle \rightarrow u_2(t_0) = b_{2,0} - b_{2,-2} = -1 - 1 = -2$$

Beachtet man noch die oben erwähnte Symmetrie, so sind also beim Code IV am Entscheidereingang im Idealfall die Niveaus 0 und ± 2 möglich. Im Hinblick auf die folgenden Abschnitte ist es sinnvoll, alle Kombinationen $\langle b_{i,\lambda} \rangle$, die zum gleichen Niveau $u_i(t_0)$ führen, in der Menge A_i zusammenzufassen:

$$A_i = \{ \langle b_{i,\lambda} \rangle \} \quad \lambda \text{ niveaubestimmend} \quad (4.10)$$

Dabei soll λ nur die niveaubestimmenden Werte durchlaufen; jede Kombination in A_i hat daher $n-1$ Elemente. Die Menge der Kombinationen aus nichtniveaubestimmenden Koeffizienten $b_{i,\lambda}$ sei B_i :

$$B_i = \{ \langle b_{i,\lambda} \rangle \} \quad \lambda \text{ nicht niveaubestimmend} \quad (4.11)$$

Jede Kombination in B_i hat 1 Elemente. Somit ist das Niveau $u_i(t_0)$ durch jeden Ausdruck der Form

$$u_i(t_0) = \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda} \rangle \in A_i} b_{i,\lambda} \cdot g_{\lambda}^{(r)}(t_0) \quad (4.12)$$

bestimmt. Die Abkürzung $\lambda: \langle b_{i,\lambda} \rangle \in A_i$ bedeutet dabei, daß über diejenigen Werte von λ summiert wird, bei denen die zugehörige Kombination $\langle b_{i,\lambda} \rangle$ niveaubestimmend ist.

Für den Code IV ist

$$A_i = \{ \langle b_{i,-2}, b_{i,0} \rangle \} \quad (4.13)$$

und

$$B_i = \{ \langle b_{i,-1} \rangle \} = \{ b_{i,-1} \}. \quad (4.14)$$

4.3. Die Amplitudenniveaus bei realem Übertragungskanal und das Augendiagramm

Die Impulsinterferenz bewirkt, daß Kombinationen $\langle b_{i,\lambda} \rangle$, die bei idealem Übertragungskanal am Entscheidereingang zum gleichen Niveau $u_i(t_0)$ führten, bei realem Kanal nicht auch die gleiche Amplitude $v_i(t_0)$ zur Folge haben. Die Auswertung der übertragenen Zeichenfolgen ist jedoch nur möglich, wenn sich die verschiedenen $v_i^{(\mu)}(t_0)$ ($\mu=0, \dots, \infty$) dem Niveau $u_i(t_0)$ zuordnen lassen. Daher ist auch bei realem Kanal eine entsprechende Indizierung der auftretenden Amplituden gerechtfertigt.

Während bei idealem Kanal ein Niveau im ungünstigsten Fall (d. h. wenn keiner der Koeffizienten $d_v=0$ ist) von n Koeffizienten b_λ abhängt, gilt für die Ausgangszeitfunktion eines realen kausalen Kanals im Zeitpunkt t_0 allgemein

$$v(t_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^0 b_\lambda \cdot h_\lambda(t_0). \quad (4.15)$$

Dabei ist

$$h_\lambda(t) = h(t - \lambda \cdot T) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot h_{\text{ÜK}}(t - [\lambda + v] \cdot T). \quad (4.16)$$

Der Menge $\{\langle b_\lambda \rangle\}$ aller möglichen Kombinationen $\langle b_\lambda \rangle$ mit $-\infty < \lambda \leq 0$ ist die Menge $\{v_\rho(t_0)\}$ ($\rho=0, \dots, \infty$) aller möglichen Amplituden $v_\rho(t_0)$ zugeordnet. $\{v_\rho(t_0)\}$ stellt einen vertikalen Schnitt durch das sog. Augendiagramm im Zeitpunkt t_0 dar. Alle Amplituden $v_i^{(\mu)}(t_0)$, die dem bei idealem Kanal auftretenden Niveau $u_i(t_0)$ zuzuordnen sind, werden in der Menge $\{v_i^{(\mu)}(t_0)\}$ zusammengefaßt:

$$\{v_i^{(\mu)}(t_0)\} = \left\{ \sum_{\lambda=-\infty}^0 b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_0) \right\} \quad (4.17)$$

Die Bedeutungen der Indizes i, μ und λ seien hier nochmals zusammengestellt: i kennzeichnet das Niveau, μ durchläuft die dem i -ten Niveau zuzuordnenden Amplituden $v_i^{(\mu)}(t_0)$ und λ kennzeichnet den Zeitpunkt, in dem das Einzelzeichen $g_\lambda^{(r)}(t)$ gesendet wurde ($g_\lambda^{(r)}(t) = g^{(r)}(t - \lambda \cdot T)$). Die Elemente der Menge $\{v_i^{(\mu)}(t_0)\}$ lassen sich noch aufschlüsseln:

$$\begin{aligned}
 v_i^{(\mu)}(t_0) &= \sum_{\lambda=-\infty}^0 b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_0) \\
 &= \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_i} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_0) + \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in B_i} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_0) + \sum_{\lambda=-\infty}^{-n} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_0) \\
 & \qquad \qquad \qquad (4.18) \\
 &= \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_i} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_0) + \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_0) \\
 &\stackrel{\text{Def.}}{=} v_{i,\mu}(t_0) + \tilde{v}_{i,\mu}(t_0)
 \end{aligned}$$

Dabei werden durch den Ausdruck $\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i$ sämtliche nichtniveaubestimmenden Indizes λ erfaßt. $v_{i,\mu}(t_0)$ stellt den niveaubestimmenden Anteil der Amplitude $v_i^{(\mu)}(t_0)$ dar. Der Anteil $\tilde{v}_{i,\mu}(t_0)$ ist dagegen unabhängig vom speziellen Niveau, so daß hier der Index i entfallen kann und man

$$v_i^{(\mu)}(t_0) = v_{i,\mu}(t_0) + \tilde{v}_\mu(t_0) \quad (4.19)$$

erhält.

Das Augendiagramm ist eine in T periodische Funktion. Ein Ausschnitt aus dem Augendiagramm eines Z-stufigen Datensignals am Entscheidereingang wird grundsätzlich die in Bild 4.2 skizzierte Form haben. Aus der Definition des Codierersoperators $\mathcal{L}_{PR}$ für die PR-Codierung geht hervor, daß das Augendiagramm bei bipolarem Quellensignal symmetrisch zur Zeitachse ist. Auch bei redundanzfreier Mehrstufencodierung wird dies i. a. der Fall sein, obwohl die Definition des zugehörigen Operators $\mathcal{L}_{ML}$ auch eine andere Verteilung der Niveaus zuließe.

Je nachdem, ob die Gesamtzahl Z der Niveaus ungerade oder gerade ist, stellt die Amplitude 0 eines der möglichen Niveaus dar oder nicht, und das Augendiagramm hat folglich in der Umgebung der Amplitude 0 ein unterschiedliches Aussehen. Beide Möglichkeiten sind in Bild 4.2 angedeutet. Beispiele für ungerades Z sind die Codes II, III und IV, Beispiele für gerades Z sind die redundanzfreien Mehrstufencodes, der Code I und die partial-response-Codes Kl. 1, n=m (m ungerade).

4.4. Der innere Augenrand ("Auge")

4.4.1. Die allgemeine Berechnung des Auges aus dem Augendiagramm

Neben der Verteilung der möglichen Signalamplituden $v_i^{(\mu)}(t_0)$, welche für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle spielt (vgl. Kap. 7), ist vor allem der innere Augenrand oder kurz "das Auge" zwischen benachbarten Niveaus von Bedeutung. Folgende Definition liegt nahe: Das i-te Auge ist der flächenmäßig größte einfach zusammenhängende Amplitudenbereich, der nicht von einer Zeitfunktion $v_i^{(\mu)}(t)$ oder $v_{i+1}^{(\mu)}(t)$ durchlaufen wird.

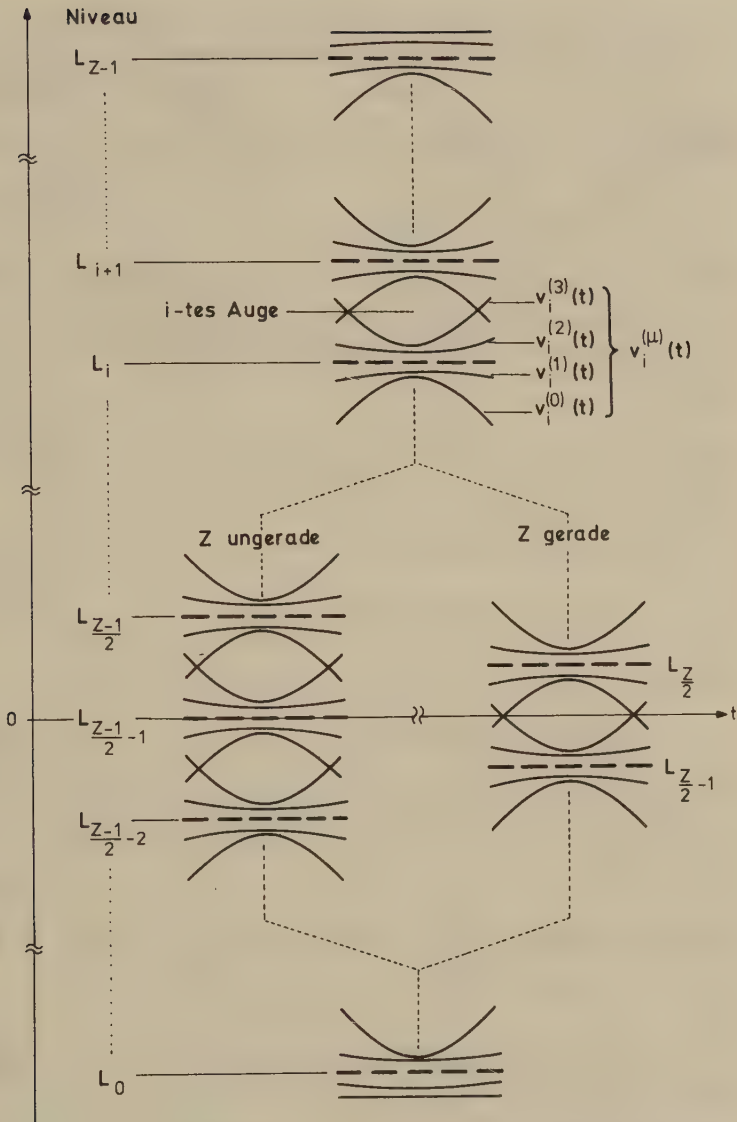


Bild 4.2: Ausschnitt aus dem Augendiagramm eines Z -stufigen Datensignals (schematisch)

Hat das Signal Z Stufen, so gibt es Z-1 Augen. U. a. ist das zwischen dem i-ten und dem (i+1)-ten Niveau liegende i-te Auge in Bild 4.2 dargestellt. Der maximale vertikale Durchmesser D_v des Auges ist ein Maß dafür, wie weit der zur Verfügung stehende Amplitudenbereich im ungünstigsten Fall ("worst case") eingeengt sein kann. Der Durchmesser D_h des Auges in Höhe der Schwelle interessiert im Zusammenhang mit der Taktableitung: Je größer D_h , desto geringer werden i. a. die Schwankungen des Abfragezeitpunktes sein. Aus den genannten Gründen werden D_v und D_h zur Definition der Kenngrößen des Auges im nächsten Abschnitt herangezogen.

Oberer und unterer innerer Augenrand jedes der Z-1 Augen lassen sich aus dem Augendiagramm berechnen. Der obere innere Augenrand $\alpha_{o,i}(t_0)$ des i-ten Auges ist im Zeitpunkt t_0 gegeben durch

$$\alpha_{o,i}(t_0) = \min_{\mu} (v_{i+1}^{(\mu)}(t_0)) , \quad (4.20)$$

der untere innere Augenrand $\alpha_{u,i}(t_0)$ dieses Auges durch

$$\alpha_{u,i}(t_0) = \max_{\mu} (v_i^{(\mu)}(t_0)) . \quad (4.21)$$

Zur Berechnung von $\alpha_{o,i}(t_0)$ und $\alpha_{u,i}(t_0)$ greifen wir auf die Gln. (4.18) und (4.19) zurück. Zunächst ergibt sich unmittelbar

$$\alpha_{o,i}(t_0) = \min_{\mu} (v_{i+1,\mu}(t_0) + \tilde{v}_{\mu}(t_0)) \quad (4.22)$$

und

$$\alpha_{u,i}(t_0) = \max_{\mu} (v_{i,\mu}(t_0) + \tilde{v}_{\mu}(t_0)) . \quad (4.23)$$

Da die Koeffizientenkombinationen $\langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_i$ und $\langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i$ unabhängig voneinander die ungünstigsten Werte annehmen können, gilt

$$\min_{\mu} (v_{i+1,\mu}(t_0) + \tilde{v}_{\mu}(t_0)) = \min_{\mu} (v_{i+1,\mu}(t_0)) + \min_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0)) \quad (4.24)$$

und

$$\max_{\mu} (v_{i,\mu}(t_0) + \tilde{v}_{\mu}(t_0)) = \max_{\mu} (v_{i,\mu}(t_0)) + \max_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0)) . \quad (4.25)$$

Ist für eine bestimmte Kombination $\langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_i$ der zugehörige Wert $\tilde{v}_{\mu}(t_0)$ maximal, so muß für die Folge mit Elementen umgekehrten Vorzeichens $\min_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0))$ erreicht werden und es muß gelten

$$\min_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0)) = - \max_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0)) . \quad (4.26)$$

Das Maximum von $\tilde{v}_{\mu}(t_0)$ wird unabhängig von i genau dann angenommen, wenn

$$b_{i,\lambda}^{(\mu)} = \text{sign} (h_{\lambda}(t_0)) \quad (4.27)$$

ist. Damit wird

$$\max_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0)) = \max_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) = \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i} |h_{\lambda}(t_0)|, \quad (4.28)$$

$$\alpha_{o,i}(t_0) = \min_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{i+1,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_{i+1}} b_{i+1,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) - \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i} |h_{\lambda}(t_0)| \quad (4.29)$$

und

$$\alpha_{u,i}(t_0) = \max_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_i} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) + \sum_{\lambda: \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i} |h_{\lambda}(t_0)| . \quad (4.30)$$

Mit den Gln.(4.29) und (4.30) stehen nun die allgemeinen Beziehungen zur Berechnung des Auges aus der Impulsantwort $h(t)$ des durch Gl.(4.3) definierten Systems $H(j\omega)$ zur Verfügung. In Abschnitt 4.4.3.6 wird gezeigt, daß sich die Formeln bei geeigneter Interpretation auch auf redundanzfreie Mehrstufencodes anwenden lassen. Allerdings muß darauf hingewiesen werden, daß die Augenberechnung in diesem Fall auch auf wesentlich direkterem Wege möglich ist ([14]); die Kenntnis von Stufenzahl und Rechteckantwort reichen bei Beachtung der Unabhängigkeit der Zeichen aus, um das Auge zu berechnen. Die Augenberechnung für den Code I, der ja als Sonderfall sowohl in den PR-Codes ("K1.1, $n=1$ ") als auch in den redundanzfreien Mehrstufencodes ($k=1$, vgl. Abschnitt 3.2) enthalten ist, ist mit Hilfe der beiden genannten Verfahren natürlich ebenfalls möglich.

Bevor die Gln.(4.29) und (4.30) zur Berechnung der Augen der ausgewählten Codes herangezogen werden, sollen im nächsten Abschnitt in Anlehnung an [14] die Kenngrößen des Auges definiert werden.

4.4.2. Kenngrößen des Auges

In Bild 4.3 ist bewußt ein stark unsymmetrisches Auge dargestellt: Die Extrema von oberem und unterem Augenrand treten nicht im gleichen Zeitpunkt auf; einer der Schnittpunkte von $\alpha_{o,i}(t)$ mit $\alpha_{u,i}(t)$ liegt oberhalb, der andere unterhalb der Schwelle Q_i . Damit soll darauf hingewiesen werden, daß derartige Fälle prinzipiell auftreten können. Bei üblichen Übertragungssystemen wird die Unsymmetrie des Auges jedoch nicht so ausgeprägt sein.

Anhand des Bildes 4.3 werden nun zwei Kenngrößen definiert, von denen sich die eine auf die Augenhöhe und die andere auf die Augenbreite bezieht.

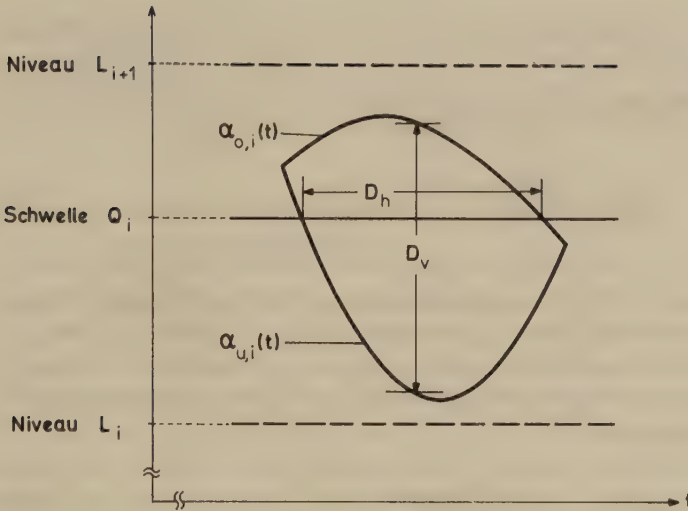


Bild 4.3: Zur Definition der Kenngrößen des Auges

Die Koeffizienten d_v des partial-response-Einzelzeichens $g^{(r)}(t)$ sind nach Voraussetzung ganzzahlig. Auf Grund der Struktur des Einzelzeichens ist am Codiererausgang und bei idealem Übertragungskanal auch am Entscheidereingang der Abstand D_L benachbarter Niveaus ganzzahlig. Sei nun D_v der maximale vertikale Augendurchmesser. Dann erhält man eine sinnvolle Definition des relativen Augenfehlers $\Delta\alpha$ durch den Vergleich von D_v mit dem maximal möglichen vertikalen Augendurchmesser $D_L \cdot \text{Max}(h_{\ddot{U}K}(t))$:

$$\Delta\alpha = 1 - \frac{D_v}{D_L \cdot \text{Max}(h_{\ddot{U}K}(t))} \quad (4.31)$$

Bei transparentem Kanal $H_{\ddot{U}K}^{(R)}(j\omega)$ ist $h_{\ddot{U}K}(t)$ $r(t)$ und somit $\text{Max}(h_{\ddot{U}K}(t))=1$; außerdem ist $D_v=D_L$ und daher $\Delta\alpha=0$.

Analog erhält man eine Definition des relativen Schrittfehlers ΔT aus dem Vergleich des horizontalen Augendurchmessers D_h in Höhe der Schwelle mit dem maximal möglichen horizontalen Augendurchmesser T :

$$\Delta T = 1 - \frac{D_h}{T} \quad (4.32)$$

Wenn die Lage der Schwelle nicht ohnehin klar ist, wie etwa beim Code I, so kann gelegentlich auch der minimale Schrittfehler $(\Delta T)_{\min}$ von Interesse sein (vgl. die Bilder 4.5 - 4.7); dieser ergibt sich, wenn man in Gl. (4.32) anstelle von D_h den maximalen horizontalen Augendurchmesser $(D_h)_{\max}$ einsetzt:

$$(\Delta T)_{\min} = 1 - \frac{(D_h)_{\max}}{T} \quad (4.33)$$

4.4.3. Die Berechnung des Auges bei den ausgewählten Codes

Es werden die inneren Augenränder als Funktion der Impulsantwort $h(t)$ des Gesamtsystems $H(j\omega)$ (Codierer, Übertragungskanal) und ergänzend auch als Funktion der Zeitantwort $h_{iK}(t)$ berechnet (vgl. Abschnitt 4.1). Dabei werden die bei $h(t)$ auf den speziellen Code hinweisenden Indizes 1, ..., IV weggelassen, da nie innerhalb desselben Abschnittes die Impulsantworten zweier verschiedener Codes gleichzeitig verwendet werden.

Zur Veranschaulichung zeigen die Bilder 4.5 - 4.8 die Augen der ausgewählten Codes speziell für den Fall, daß $H_{iK}(j\omega)$ die Übertragungsfunktion $H^{(Y)}(j\omega)$ des in Abschnitt 3.3.4 definierten Nyquistfilters darstellt. Für die Codes II und IV wird dem wichtigsten Anwendungsfall entsprechend $\ddot{u}_N$ und damit $H_{iK}(j\omega) = H^{(0)}(j\omega)$ gewählt. Da aus den in

Kap. 3 genannten Gründen bei Verwendung der Codes I und III Daten praktisch nur mit $\ddot{U} = \ddot{U}_N$ übertragen werden können, wird für diese Codes der Einfluß der Bandbreite von $H_{ijK}(\omega)$ auf das Auge gezeigt. Die Übertragungsraten liegen dabei zwischen $\ddot{U}_N/2$ und $\ddot{U}_N$.

4.4.3.1. Das Auge bei Codierung nach Partial-Response Klasse 4, n=3 (Code IV)

Gemäß Abschnitt 4.2 gibt es bei diesem Code 3 mögliche Niveaus $L_i (i=0,1,2)$. Die Verknüpfung der Niveaus mit einem bestimmten Zeitpunkt t_0 , wie sie in den vorangegangenen Abschnitten in der Bezeichnung $u_i(t_0)$ zum Ausdruck kam, kann entfallen, wenn es nur auf die Amplitudenwerte L_i ankommt; denn diese sind natürlich zeitunabhängig. Durch Numerierung der Niveaus nach wachsenden Amplituden ergibt sich

$$L_0 = -2, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 2. \quad (4.34)$$

Die Gln.(4.13) und (4.14) liefern die zur Bestimmung des Auges aus den Gln.(4.29) und (4.30) erforderlichen Mengen A_i und B_i . Wie man durch Einsetzen in Gl.(4.9) bestätigt, ist im einzelnen

$$\begin{aligned} A_0 &= \{ \langle b_{0,-2}^{(0)}, b_{0,0}^{(0)} \rangle \} = \{ \langle 1, -1 \rangle \} \\ A_1 &= \{ \langle b_{1,-2}^{(0)}, b_{1,0}^{(0)} \rangle, \langle b_{1,-2}^{(1)}, b_{1,0}^{(1)} \rangle \} = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle -1, 1 \rangle \} \\ A_2 &= \{ \langle b_{2,-2}^{(0)}, b_{2,0}^{(0)} \rangle \} = \{ \langle -1, 1 \rangle \} \end{aligned} \quad (4.35)$$

und für $i=0,1,2$

$$B_i = \{ \langle b_{i,-1}^{(0)}, b_{i,-1}^{(1)} \rangle \} = \{ b_{i,-1}^{(0)}, b_{i,-1}^{(1)} \} = \{ 1, -1 \}. \quad (4.36)$$

Für das Maximum des nicht-niveaubestimmenden Anteils des Auges gemäß Gl.(4.28) erhält man unabhängig von i

$$\text{Max}_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0)) = \sum_{\lambda: \langle b_{1,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i} |h_{\lambda}(t_0)| = \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq -2, 0}}^0 |h_{\lambda}(t_0)| = \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq -2}}^{-1} |h_{\lambda}(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.37)$$

Wegen der Symmetrie des Auges zur Zeitachse genügt es, das zwischen den Niveaus $L_1=0$ und $L_2=-2$ liegende Auge zu berechnen. Die benötigten niveaubestimmenden Anteile $\text{Max}_{\mu}(v_{1,\mu}(t_0))$ für den unteren Augenrand $\alpha_{u,1}(t_0)$ und $\text{Min}_{\mu}(v_{2,\mu}(t_0))$ für den oberen Augenrand $\alpha_{o,1}(t_0)$ ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\mu} (v_{1,\mu}(t_0)) &= \text{Max}_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{1,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_1} b_{1,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) \\ &= \text{Max}_{\mu} \left(b_{1,-2}^{(0)} \cdot h_{-2}(t_0) + b_{1,0}^{(0)} \cdot h_0(t_0), b_{1,-2}^{(1)} \cdot h_{-2}(t_0) + b_{1,0}^{(1)} \cdot h_0(t_0) \right) \\ &= \text{Max} \left(h_{-2}(t_0) + h_0(t_0), -[h_{-2}(t_0) + h_0(t_0)] \right) \quad (4.38) \\ &= |h_{-2}(t_0) + h_0(t_0)| \\ &= |h(t_0) + h(t_0 + 2T)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mu} (v_{2,\mu}(t_0)) &= \text{Min}_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{2,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_2} b_{2,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) \\ &= \text{Min}_{\mu} \left(b_{2,-2}^{(0)} \cdot h_{-2}(t_0) + b_{2,0}^{(0)} \cdot h_0(t_0) \right) \\ &= b_{2,-2}^{(0)} \cdot h_{-2}(t_0) + b_{2,0}^{(0)} \cdot h_0(t_0) \quad (4.39) \\ &= -h_{-2}(t_0) + h_0(t_0) \\ &= h(t_0) - h(t_0 + 2T) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Gln.(4.37) und (4.39) in Gl.(4.29) erhält man den oberen Augenrand

$$\alpha_{o,1}^{(IV)}(t_0) = h(t_0) - h(t_0 + 2T) - \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq 2}}^{-1} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.40)$$

und durch Einsetzen der Gln.(4.37) und (4.38) in Gl.(4.30) den unteren Augenrand

$$\alpha_{u,1}^{(IV)}(t_0) = |h(t_0) + h(t_0 + 2T)| + \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq 2}}^{-1} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.41)$$

Bei Beachtung der erwähnten Symmetrie des Augendiagramms zur Zeitachse ergibt sich grundsätzlich der in Bild 4.4 skizzierte Verlauf der Augen.

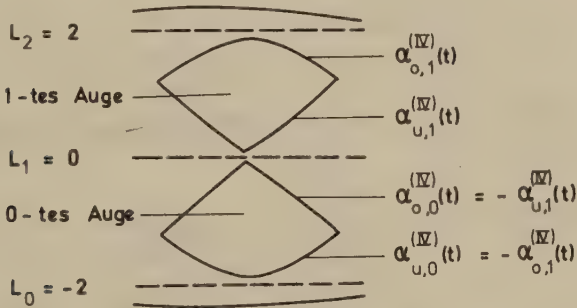


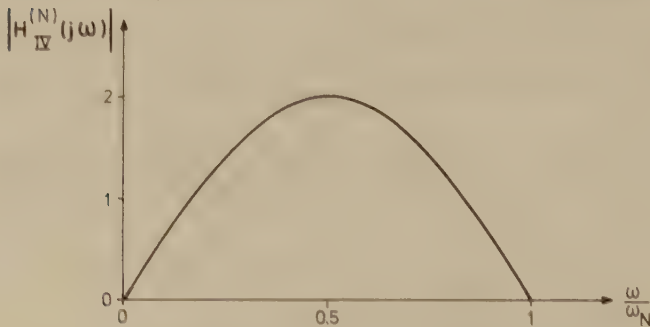
Bild 4.4: Die Augen bei Codierung nach partial-response Klasse 4, n=3 (Code IV), schematisch

Aus den Gln.(4.40) und (4.41) läßt sich das Auge bei beliebigem Übertragungskanal bestimmen, wenn $h(t)$ bekannt ist. In Bild 4.5 ist speziell der Übertragungskanal zugrundegelegt, der bei Übertragung mit der Nyquist rate einen Augenfehler $\Delta\alpha=0$ ermöglicht.

Partial - Response - Koeffizienten : $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = -1$

Übertragungskanal : $H_{\text{IV}}^{(N)}(j\omega) = H_{\text{C,IV}}(j\omega) \cdot H^{(0)}(j\omega)$

$$\left| H_{\text{IV}}^{(N)}(j\omega) \right| = \begin{cases} \left| \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot e^{-jv\omega T} \right| = 2 \cdot |\sin(\omega T)| & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\ddot{U} = \ddot{U}_N$$

$$\Delta\alpha = 0$$

$$(\Delta T)_{\min} = 0.6$$

$$h_{\text{IV}}^{(N)}(t) = \sum_{v=0}^2 d_v \cdot h^{(0)}(t-v \cdot T)$$

$$h_{\text{ÜK}}^{(N)}(t) = h^{(0)}(t) = \text{si}(\omega_N \cdot t) \cdot \frac{\omega_N}{\pi}$$

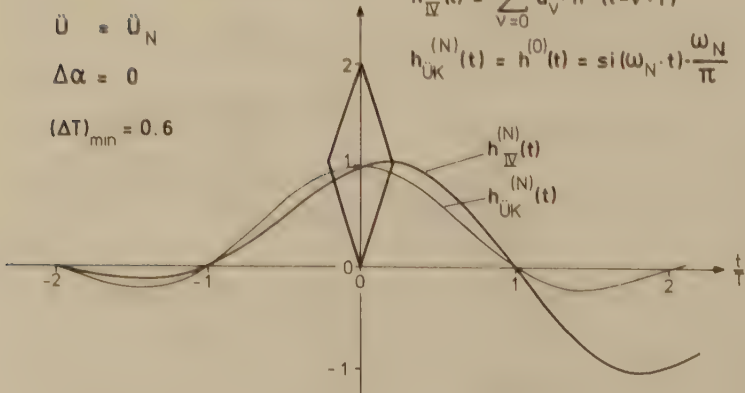


Bild 4.5: Übertragungskanal und Zeitantwort mit Auge bei Codierung nach PR-Klasse 4, $n=3$ (Code IV)

Die Übertragungsfunktion des Kanals ist

$$H_{\text{IV}}^{(N)}(j\omega) = H_{C, \text{IV}}(j\omega) \cdot H_{\text{ÜK}}^{(N)}(j\omega) = H_{C, \text{IV}}(j\omega) \cdot H^{(0)}(j\omega) \quad (4.42)$$

Mit den PR-Koeffizienten $d_0=1$, $d_1=0$, $d_2=-1$ wird

$$H_{C, \text{IV}}(j\omega) = \sum_{v=0}^2 d_v \cdot e^{-jv\omega T} = 1 - e^{-2j\omega T} \quad (4.43)$$

Setzt man noch $H^{(0)}(j\omega)$ entsprechend Gl.(3.7) ein, so ergibt sich für den Betrag von $H_{\text{IV}}^{(N)}(j\omega)$

$$|H_{\text{IV}}^{(N)}(j\omega)| = \begin{cases} 2 \cdot |\sin(\omega T)| & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.44)$$

wie im oberen Teil des Bildes dargestellt. Der untere Teil des Bildes zeigt die Impulsantwort von $H_{\text{IV}}^{(N)}(j\omega)$

$$h_{\text{IV}}^{(N)}(t) = \sum_{v=0}^2 d_v \cdot h_{\text{ÜK}}^{(N)}(t-v \cdot T) = \sum_{v=0}^2 d_v \cdot h^{(0)}(t-v \cdot T) = [\text{si}(\omega_N t) - \text{si}(\omega_N [t-2T])] \cdot \frac{\omega_N}{\pi} \quad (4.45)$$

und den inneren Augenrand. Der Vollständigkeit halber ist auch die Impulsantwort

$$h_{\text{ÜK}}^{(N)}(t) = h^{(0)}(t) = \text{si}(\omega_N t) \cdot \frac{\omega_N}{\pi} \quad (4.46)$$

angegeben, da nach Gl.(4.31) zur Bestimmung des Augenfehlers die vertikale Augenöffnung mit $D_L \cdot \text{Max}(h_{\text{ÜK}}(t))$ verglichen wird.

Es läßt sich nun leicht nachprüfen, daß für den durch die Gln.(4.42) und (4.43) definierten Übertragungskanal im Zeitpunkt $t_0=0$ $\Delta\alpha=0$ wird.

Da

$$\begin{aligned} h_{\text{IV}}^{(N)}(0) &= 1 \\ h_{\text{IV}}^{(N)}(2T) &= -1 \\ h_{\text{IV}}^{(N)}(\lambda \cdot T) &= 0 \quad \text{für } \lambda \neq 0, 2, \end{aligned} \quad (4.47)$$

erhält man aus den Gln.(4.40) und (4.41)

$$\begin{aligned} \alpha_{o,1}^{(\text{IV})}(0) &= 2 \\ \alpha_{u,1}^{(\text{IV})}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

und damit für den maximalen vertikalen Augendurchmesser

$$D_v^{(\text{IV})} = \alpha_{o,1}^{(\text{IV})}(0) - \alpha_{u,1}^{(\text{IV})}(0) = 2. \quad (4.49)$$

Mit dem Niveaubabstand $D_L=2$ und

$$\text{Max} (h_{\text{ÜK}}^{(N)}(t)) = \text{si}(0) = 1 \quad (4.50)$$

(vgl. Gl.(4.46)) ergibt sich aus Gl.(4.31) $\Delta\alpha=0$.

4.4.3.2. Das Auge bei pseudoternärer Codierung (Code III)

Der Code III wird hier im Anschluß an den Code IV behandelt, da die Augenberechnung vollkommen analog durchgeführt werden kann und sich eine ausführliche Darstellung daher erübrigt.

Mit $n=2$, $d_0=1$ und $d_1=-1$ wird das partial-response-Einzelzeichen

$$g^{(r)}(t) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot r_v(t) = r_0(t) - r_1(t) = r(t) - r(t-T). \quad (4.51)$$

Für $0 < t_0 < T$ ist

$$\begin{aligned} g_0^{(r)}(t_0) &= 1 \\ g_{-1}^{(r)}(t_0) &= -1 \end{aligned} \quad (4.52)$$

und entsprechend Gl.(4.9) ergibt sich für die Niveaus bei transparentem Übertragungskanal

$$u_i(t_0) = \sum_{\lambda=-1}^0 b_{i,\lambda} \cdot g_{\lambda}^{(r)}(t_0) = b_{i,0} - b_{i,-1} \quad (4.53)$$

Beachtet man, daß $b_{i,\lambda} \in \{1, -1\}$, so erhält man für die möglichen Niveaus auch hier wieder $L_0 = -2$, $L_1 = 0$ und $L_2 = 2$. In den zur Bestimmung der Mengen A_i heranzuziehenden niveaubestimmenden Kombinationen (vgl. Gln.(4.13) und (4.35)) ist lediglich $b_{i,-2}$ durch $b_{i,-1}$ zu ersetzen; die Werte der Elemente der Mengen ändern sich nicht.

Da keiner der Koeffizienten d_v in $g^{(r)}(t)$ gleich Null ist, fehlt also in $g^{(r)}(t)$ ein nicht-niveaubestimmender Anteil, folglich ist die Menge B_i leer.

Der nicht-niveaubestimmende Anteil $\tilde{v}_{\mu}(t_0)$ der Amplitude $v_i^{(\mu)}(t_0)$ in Gl.(4.19) ist

$$\tilde{v}_{\mu}(t_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \quad (4.54)$$

und analog zu Gl.(4.37) ergibt sich

$$\max_{\mu}(\tilde{v}_{\mu}(t_0)) = \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} |h_{\lambda}(t_0)| = \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.55)$$

Weiterhin erhält man entsprechend Gl.(4.38)

$$\max_{\mu}(v_{i,\mu}(t_0)) = |h(t_0) + h(t_0 + T)| \quad (4.56)$$

und entsprechend Gl.(4.39)

$$\min_{\mu} (v_{2,\mu}(t_0)) = h(t_0) - h(t_0 + T) \quad (4.57)$$

Einsetzen der Gln.(4.55) und (4.57) in die allgemeine Beziehung für den oberen Augenrand (Gl.(4.29) liefert

$$\alpha_{0,1}^{(III)}(t_0) = h(t_0) - h(t_0 + T) - \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.58)$$

Den unteren Augenrand im Zeitpunkt t_0 erhält man durch Einsetzen der Gln.(4.55) und (4.56) in Gl.(4.30):

$$\alpha_{u,1}^{(III)}(t_0) = |h(t_0) + h(t_0 + T)| + \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.59)$$

Wie schon erwähnt, ist bei pseudoternärer Codierung eine Übertragung von Daten nur mit Übertragungsraten sinnvoll, die kleiner sind als die Nyquistrate. Deshalb wurden für die Übertragungskanäle in Bild 4.6 Übertragungsfunktionen nach Gl.(3.17) gewählt. Für den Code III erhält man

$$H_{III}^{(Y)}(j\omega) = H_{C,III}(j\omega) \cdot H^{(Y)}(j\omega) \quad (4.60)$$

Durch Einsetzen der PR-Koeffizienten $d_0=1$ und $d_1=-1$ in Gl.(3.15) ergibt sich für die Codiererübertragungsfunktion

$$H_{C,III}(j\omega) = \sum_{v=0}^1 d_v \cdot e^{-jv\omega T} = 1 - e^{-j\omega T} \quad (4.61)$$

und für deren Betrag

$$|H_{C,III}(j\omega)| = 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right| \quad (4.62)$$

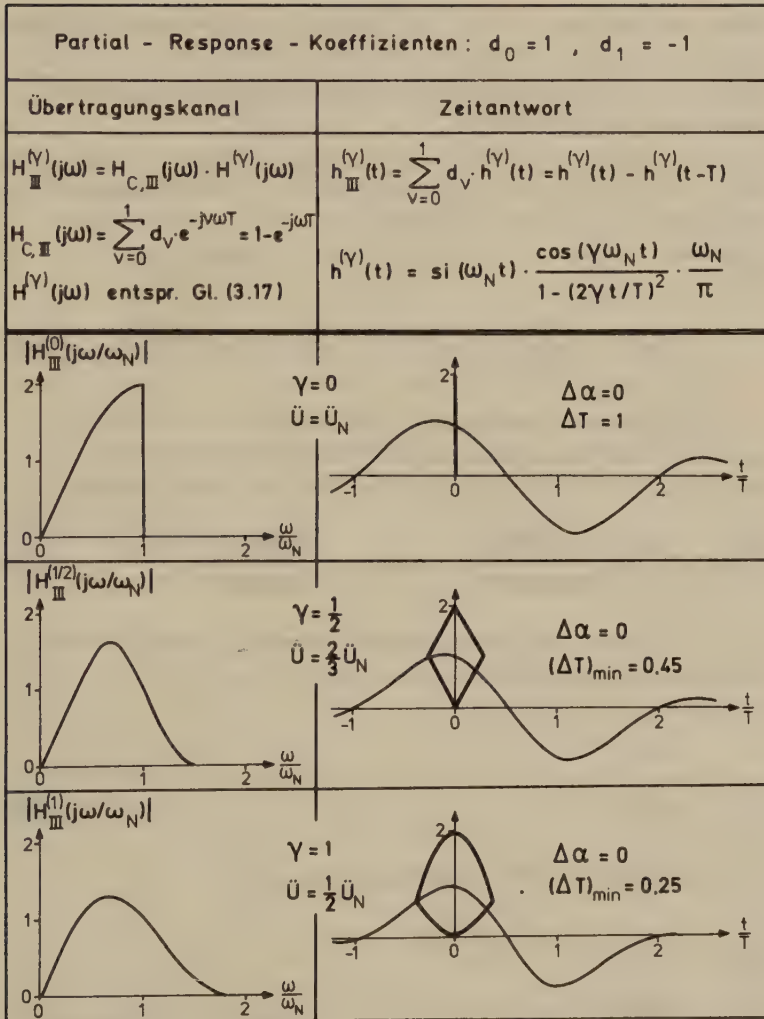


Bild 4.6: Zeitantworten und Augen bei pseudoternärer Codierung (Code III) für Nyquist-Übertragungskanäle mit unterschiedlichen roll-off-Faktoren

Durch Multiplikation mit $|H^{(\gamma)}(j\omega)|$ entsprechend Gl.(4.60) ergeben sich die im linken Teil des Bildes für die drei roll-off-Faktoren $\gamma=0, \frac{1}{2}$ und 1 dargestellten Frequenzgänge von $|H_{III}^{(\gamma)}(j\omega)|$.

Der rechte Teil von Bild 4.6 zeigt die zugehörigen Impulsantworten $h_{III}^{(\gamma)}(t)$ mit den nach Gl.(4.58) und Gl.(4.59) berechneten Augen. Für $h_{III}(t)$ gilt allgemein

$$h_{III}(t) = \sum_{v=0}^1 d_v \cdot h_{ÜK}(t-v \cdot T) = h_{ÜK}(t) - h_{ÜK}(t-T) \quad ; \quad (4.63)$$

bei einem Übertragungskanal nach Gl.(4.60) ist für $h_{ÜK}(t)$ speziell die Impulsantwort $h^{(\gamma)}(t)$ des "raised-cosine"-Tiefpasses $H^{(\gamma)}(j\omega)$ einzusetzen. Es ist (vgl. z.B. [13])

$$h^{(\gamma)}(t) = h^{(0)}(t) \cdot \frac{\cos(\gamma \cdot \omega_N t)}{1 - (2\gamma t/T)^2} = \text{si}(\omega_N t) \cdot \frac{\cos(\gamma \cdot \omega_N t)}{1 - (2\gamma t/T)^2} \cdot \frac{\omega_N}{\pi} \quad (4.64)$$

$h^{(\gamma)}(t)$ erfüllt unabhängig von γ die erste Nyquist-Bedingung. Im Zeitpunkt $t_0=0$ wird wegen

$$\begin{aligned} h_{III}^{(\gamma)}(0) &= 1 \\ h_{III}^{(\gamma)}(T) &= -1 \\ h_{III}^{(\gamma)}(\lambda \cdot T) &= 0 \quad \text{für } \lambda = 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (4.65)$$

der innere Augenrand

$$\begin{aligned} \alpha_{o,1}^{(III)}(0) &= 2 \\ \alpha_{u,1}^{(III)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

wie man anhand der Gln.(4.58) und (4.59) nachprüft.

Ferner ist

$$\text{Max} \{h_{\text{ÜK}}^{(\gamma)}(t)\} = \text{Max} \{h^{(\gamma)}(t)\} = h^{(\gamma)}(0) = 1, \quad (4.67)$$

der Niveauabstand $D_L=2$ und der maximale vertikale Augendurchmesser

$$D_v^{(\text{III})} = \alpha_{0,1}^{(\text{III})}(0) - \alpha_{u,1}^{(\text{III})}(0) = 2 \quad (4.68)$$

Damit erhält man aus der Definitionsgleichung für den Augenfehler (Gl.(4.31)) unabhängig von γ den Wert $\Delta\alpha=0$. Der minimale Schrittfehler $(\Delta T)_{\min}$ nimmt von 100 % bei $\ddot{U}=\ddot{U}_N$ auf 25 % bei $\ddot{U}=\ddot{U}_N/2$ ab, erreicht also selbst bei der halben Nyquistrate noch nicht den Wert Null (vgl. dagegen Bild 4.8).

4.4.3.3. Das Auge bei duobinärer Codierung (Code II)

Die Herleitung der Beziehungen zur Augenberechnung erfolgt nach dem in den beiden vorangegangenen Abschnitten verwendeten Schema.

Das PR-Einzelzeichen $g^{(r)}(t)$ ergibt sich mit $n=2$ und $d_0=d_1=1$ zu

$$g^{(r)}(t) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot r_v(t) = r_0(t) + r_1(t) = r(t) + r(t-T) \quad (4.69)$$

Für $0 < t_0 < T$ ist

$$g_0^{(r)}(t_0) = g_{-1}^{(r)}(t_0) = 1 \quad ; \quad (4.70)$$

die idealen Niveaus $u_i(t_0)$ erhält man aus

$$u_i(t_0) = \sum_{\lambda=-1}^0 b_{i,\lambda} \cdot g_{\lambda}^{(r)}(t_0) = b_{i,-1} + b_{i,0} \quad (4.71)$$

Von den vier möglichen Kombinationen $\langle b_{i,-1}, b_{i,0} \rangle$ führen demnach

$$\begin{aligned} \langle -1, -1 \rangle & \text{ zum Niveau } L_0 = -2 \\ \langle 1, -1 \rangle, \langle -1, 1 \rangle & \text{ zum Niveau } L_1 = 0 \text{ und} \\ \langle 1, 1 \rangle & \text{ zum Niveau } L_2 = 2 \end{aligned} \quad (4.72)$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} A_0 &= \{ \langle b_{0,-1}^{(0)}, b_{0,0}^{(0)} \rangle \} = \{ \langle -1, -1 \rangle \} \\ A_1 &= \{ \langle b_{1,-1}^{(0)}, b_{1,0}^{(0)} \rangle, \langle b_{1,-1}^{(1)}, b_{1,0}^{(1)} \rangle \} = \{ \langle 1, -1 \rangle, \langle -1, 1 \rangle \} \\ A_2 &= \{ \langle b_{2,-1}^{(0)}, b_{2,0}^{(0)} \rangle \} = \{ \langle 1, 1 \rangle \}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Die Menge B_i ist für alle i leer, da keiner der PR-Koeffizienten verschwindet. In diesem Fall ist der nicht-niveaubestimmende Anteil $\tilde{v}_{\mu}(t_0)$ der Amplitude $v_i^{(\mu)}(t_0)$ in Gl.(4.19) nur von n abhängig. Da sowohl beim Code II als auch beim Code III $n=2$ ist, ist auch für den Code II $\tilde{v}_{\mu}(t_0)$ durch Gl.(4.54) und $\text{Max}_{\mu}(\tilde{v}_{\mu}(t_0))$ durch Gl.(4.55) gegeben.

Es soll wieder das zwischen $L_1=0$ und $L_2=2$ liegende 1-te Auge berechnet werden. Analog zu Gl.(4.38) ergibt sich hier zunächst mit Gl.(4.73)

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\mu}(v_{1,\mu}(t_0)) &= \text{Max}_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{1,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_1} b_{1,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) \\ &= \text{Max} (h_{-1}(t_0) - h_0(t_0), -[h_{-1}(t_0) - h_0(t_0)]) \\ &= |h(t_0+T) - h(t_0)| \end{aligned} \quad (4.74)$$

und

$$\min_{\mu} (v_{2,\mu}(t_0)) = \min_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{2,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_2} b_{2,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) = h(t_0) + h(t_0 + T) \quad (4.75)$$

Den oberen Augenrand erhält man durch Einsetzen von Gl.(4.75) und Gl.(4.55) in Gl.(4.29)

$$\alpha_{0,1}^{(II)}(t_0) = h(t_0) + h(t_0 + T) - \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.76)$$

den unteren Augenrand durch Einsetzen von Gl.(4.74) und Gl.(4.55) in Gl.(4.30):

$$\alpha_{0,1}^{(II)}(t_0) = |h(t_0 + T) - h(t_0)| + \sum_{\lambda=-\infty}^{-2} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| \quad (4.77)$$

Diese Augenformeln für den Code II lassen sich auch in einfacher Weise aus den entsprechenden Beziehungen (Gln.(4.58), (4.59)) für den Code III ableiten, wenn man die Wirkung des bei den beiden Codes unterschiedlichen Vorzeichens des Koeffizienten d_1 berücksichtigt und jeweils das Vorzeichen des Summanden $h(t_0 + T)$ umkehrt.

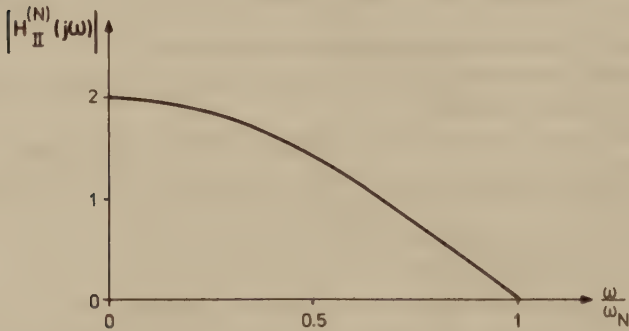
Wie beim Code IV, so stellt die Datenübertragung mit der Nyquist rate $\dot{U}_N$ auch bei duobinärer Codierung den bekanntesten Anwendungsfall dar. Deshalb wurde in Bild 4.7 auch nur dieser Fall berücksichtigt. In gleicher Weise wie Bild 4.5 für den Code IV, zeigt das Bild im oberen Teil den erforderlichen Übertragungskanal $H_{II}^{(N)}(j\omega)$, im unteren Teil die zugehörige Impulsantwort $h_{II}^{(N)}(t)$ und zur Ergänzung auch $h_{\dot{U}K}^{(N)}(t)$. Analog zu den Gln.(4.42) bis (4.45) gelten hier die folgenden Beziehungen

$$H_{II}^{(N)}(j\omega) = H_{C,II}(j\omega) \cdot H_{\dot{U}K}^{(N)}(j\omega) = H_{C,II}(j\omega) \cdot H^{(0)}(j\omega) \quad (4.78)$$

Partial - Response - Koeffizienten : $d_0 = d_1 = 1$

Übertragungskanal : $H_{II}^{(N)}(j\omega) = H_{C,II}(j\omega) \cdot H^{(0)}(j\omega)$

$$|H_{II}^{(N)}(j\omega)| = \begin{cases} \left| \sum_{v=0}^1 d_v \cdot e^{-jv\omega T} \right| = 2 \cdot \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\ddot{U} = \ddot{U}_N$$

$$\Delta\alpha = 0$$

$$(\Delta T)_{\min} = 0.3$$

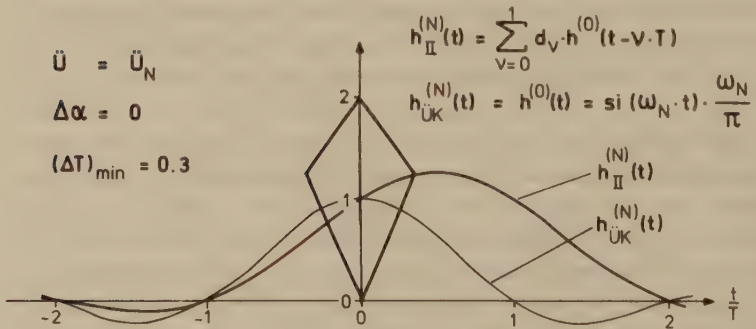


Bild 4.7: Übertragungskanal und Zeitanwort mit Auge bei duobinärer Codierung (Code II)

$$H_{C,II}(j\omega) = \sum_{v=0}^1 d_v \cdot e^{-jv\omega T} = 1 + e^{-j\omega T} \quad (4.79)$$

$$|H_{II}^{(N)}(j\omega)| = \begin{cases} 2 \cdot \cos(\omega T/2) & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.80)$$

und

$$h_{II}^{(N)}(t) = \sum_{v=0}^1 d_v \cdot h_{ÜK}^{(N)}(t-v \cdot T) = \sum_{v=0}^1 d_v \cdot h^{(0)}(t-v \cdot T) = [\text{si}(\omega_N t) + \text{si}(\omega_N [t+T])] \cdot \frac{\omega_N}{\pi} \quad (4.81)$$

Durch Einsetzen von Gl.(4.81) in die Gln.(4.76) und (4.77) läßt sich leicht zeigen, daß bei Wahl von $t_0=0$ der Augenfehler $\Delta\alpha$ zu Null wird.

Beim Vergleich mit den entsprechenden Angaben für den Code IV in Bild 4.5 fällt insbesondere auf, daß der Code II einen sehr günstigen Schrittfehler ($(\Delta T)_{\min}=30\%$) aufweist. Die Ursache hierfür ist darin zu suchen, daß in der duobinär codierten Zeichenfolge die direkten Übergänge $2 \rightarrow -2$ und $-2 \rightarrow 2$ nicht auftreten (vgl. dazu auch [26]).

4.4.3.4. Das Auge bei binär-bipolarer Codierung (Code I)

Im Rahmen der PR-Codes stellt der Code I den einfachsten Fall dar. Obwohl die Augenformel für diesen Code bekannt ist und außerdem auch auf direktem Wege abgeleitet werden kann, soll die Herleitung in diesem Abschnitt kurz skizziert werden, weil auf diese Weise auch gleichzeitig das einfachste Beispiel für einen redundanzfreien Code (vgl. Abschnitt 4.4.3.6) behandelt wird.

Beim Code I ist

$$\begin{aligned}
 n &= 1 \\
 d_0 &= 1 \\
 g^{(r)}(t) &\equiv r(t) \\
 L_0 &= -1, \quad L_1 = 1 \\
 A_0 &= \{ \langle b_{0,0}^{(0)} \rangle \} = \{-1\}, \quad A_1 = \{ \langle b_{1,0}^{(0)} \rangle \} = \{+1\}
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Zu jedem Niveau gibt es also genau eine niveaubestimmende Kombination und diese Kombination enthält nur ein Element. Die Menge B_i ist leer für alle i . Da es nur zwei mögliche Niveaus gibt, existiert nur ein Auge; wegen dessen Symmetrie zur Zeitachse braucht lediglich ein Augenrand, z. B. der obere, bestimmt zu werden.

Das Maximum des nicht-niveaubestimmenden Anteils der Amplitude $v_i^{(\mu)}(t_0)$ ist

$$\max_{\mu} (\tilde{v}_{\mu}(t_0)) = \sum_{\lambda=-\infty}^{-1} |h(t_0 - \lambda \cdot T)|. \tag{4.83}$$

Ferner wird

$$\begin{aligned}
 \min_{\mu} (v_{1,\mu}(t_0)) &= \min_{\mu} \left(\sum_{\lambda: \langle b_{1,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in A_1} b_{1,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_{\lambda}(t_0) \right) \\
 &= \min (b_{1,0}^{(0)} \cdot h_0(t_0)) \\
 &= h(t_0)
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Durch Einsetzen der Gln. (4.83) und (4.84) in Gl. (4.29) erhält man sofort

$$\alpha_{0,0}^{(I)}(t_0) = h(t_0) - \sum_{\lambda=-\infty}^{-1} |h(t_0 - \lambda \cdot T)|. \tag{4.85}$$

Bild 4.8 zeigt für den Code I Zeitantworten und nach Gl.(4.85) berechnete Augen, die sich ergeben, wenn bei fester Bitrate $1/T$ als Übertragungskanäle Nyquistfilter mit unterschiedlichen roll-off-Faktoren γ gewählt werden. Die Übertragungsraten bezogen auf die Sperrgrenze $(1+\gamma) \cdot \omega_N/2\pi$ sind dabei

$$\ddot{U} = \frac{1/T}{(1+\gamma) \cdot \omega_N/2\pi} = \frac{2}{1+\gamma} \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}} \quad (4.86)$$

Beim Übergang von $\gamma=0$ auf $\gamma=1$ nimmt die Bandbreite von ω_N auf $2 \cdot \omega_N$ zu und die Übertragungsrate von $\ddot{U}_N$ auf $\ddot{U}_N/2$ ab. Der Augenfehler $\Delta\alpha$ ist in allen Fällen gleich Null, der Schrittfehler ΔT nimmt von 100 % ($\gamma=0$) auf Null ($\gamma=1$) ab. Die Tatsache, daß ΔT bei der halben Nyquistrate gleich Null wird, ist im Vergleich zum Code III (vgl. Bild 4.6) bemerkenswert, da ΔT bei diesem Code bei gleicher Bandbreite noch 25 % beträgt.

4.4.3.5. Zusammenstellung der Formeln zur Augenberechnung als Funktion von $h_{\ddot{U}K}(t)$ für die Codes I-IV

In den vorangegangenen Abschnitten wurde der innere Augenrand stets als Funktion der für jeden PR-Code verschiedenen Impulsantwort $h(t)$ angegeben. Gelegentlich ist auch eine für alle PR-Codes einheitliche Darstellung der Formeln zur Augenberechnung mit Hilfe der in Abschnitt 4.1 definierten Zeitantwort $h_{\ddot{U}K}(t)$ von Interesse. Durch Einsetzen der allgemeinen Beziehung

$$h(t) = \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot h_{\ddot{U}K}(t-v \cdot T) \quad (4.87)$$

in die Gl.n.(4.40) und (4.41), (4.58) und (4.59), (4.75) und (4.76) sowie (4.85) erhält man

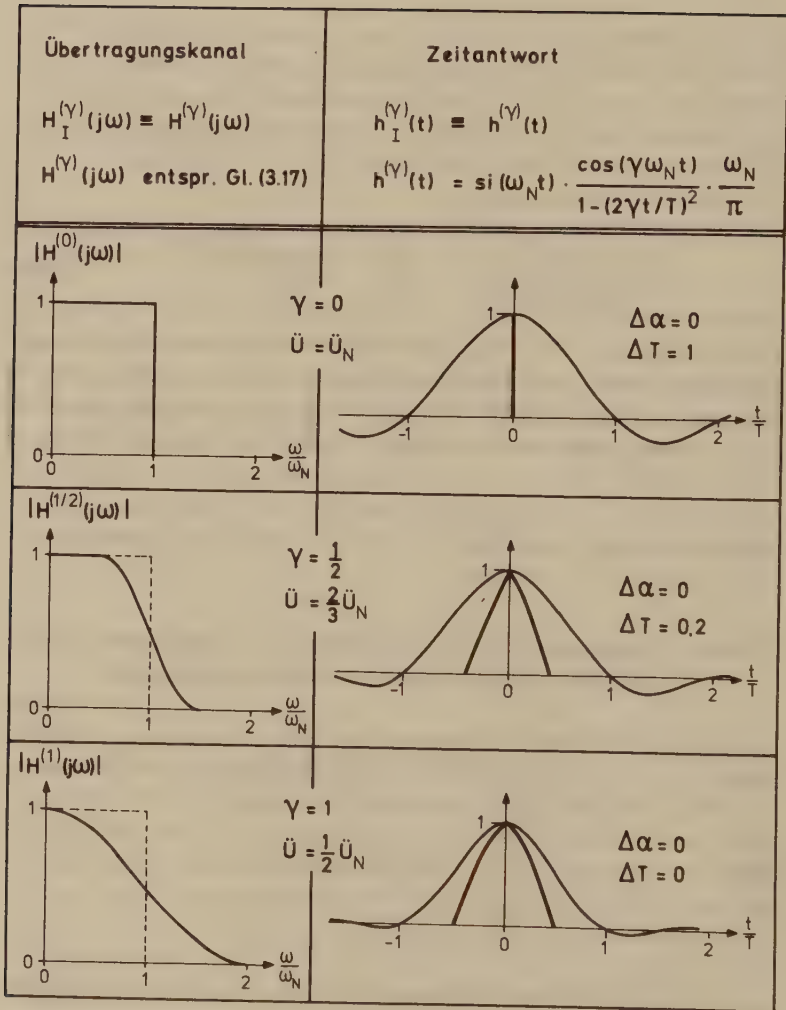


Bild 4.8: Zeitantworten und Augen bei binär-bipolarer Codierung (Code I) für Nyquist-Übertragungskanäle mit unterschiedlichen roll-off-Faktoren

für den Code I

$$\alpha_{o,0}^{(I)}(t_0) = h_{\dot{U}K}(t_0) - \sum_{\lambda=1}^{\infty} |h_{\dot{U}K}(t_0 + \lambda \cdot T)| \quad (4.88)$$

für den Code II

$$\alpha_{o,1}^{(II)}(t_0) = 2 \cdot h_{\dot{U}K}(t_0) + h_{\dot{U}K}(t_0 - T) + h_{\dot{U}K}(t_0 + T) - \sum_{\lambda=2}^{\infty} |h_{\dot{U}K}(t_0 + \lambda \cdot T) + h_{\dot{U}K}(t_0 + [\lambda-1] \cdot T)| \quad (4.89)$$

$$\alpha_{u,1}^{(II)}(t_0) = |h_{\dot{U}K}(t_0 + T) - h_{\dot{U}K}(t_0 - T)| + \sum_{\lambda=2}^{\infty} |h_{\dot{U}K}(t_0 + \lambda \cdot T) + h_{\dot{U}K}(t_0 + [\lambda-1] \cdot T)|, \quad (4.90)$$

für den Code III

$$\alpha_{o,1}^{(III)}(t_0) = 2 \cdot h_{\dot{U}K}(t_0) - h_{\dot{U}K}(t_0 - T) - h_{\dot{U}K}(t_0 + T) - \sum_{\lambda=2}^{\infty} |h_{\dot{U}K}(t_0 + \lambda \cdot T) - h_{\dot{U}K}(t_0 + [\lambda-1] \cdot T)| \quad (4.91)$$

$$\alpha_{u,1}^{(III)}(t_0) = |h_{\dot{U}K}(t_0 + T) - h_{\dot{U}K}(t_0 - T)| + \sum_{\lambda=2}^{\infty} |h_{\dot{U}K}(t_0 + \lambda \cdot T) - h_{\dot{U}K}(t_0 + [\lambda-1] \cdot T)| \quad (4.92)$$

und für den Code IV

$$\alpha_{o,1}^{(IV)}(t_0) = 2 \cdot h_{\dot{U}K}(t_0) - h_{\dot{U}K}(t_0 - 2T) - h_{\dot{U}K}(t_0 + 2T) - \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq 2}}^{\infty} |h_{\dot{U}K}(t_0 + \lambda \cdot T) - h_{\dot{U}K}(t_0 + [\lambda-2] \cdot T)| \quad (4.93)$$

$$\alpha_{u,1}^{(IV)}(t_0) = |h_{\dot{U}K}(t_0 + 2T) - h_{\dot{U}K}(t_0 - 2T)| + \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq 2}}^{\infty} |h_{\dot{U}K}(t_0 + \lambda \cdot T) - h_{\dot{U}K}(t_0 + [\lambda-2] \cdot T)|, \quad (4.94)$$

4.4.3.6. Das Auge bei redundanzfreier Mehrstufencodierung

Wir gehen aus von den Angaben in Abschnitt 3.2. Blöcke zu je k Bits werden zusammengefaßt und durch eine Zuordnungstabelle wird jeder der 2^k möglichen Bitkombinationen $\langle b_{i,\mu} \rangle$ ($i=0, \dots, 2^k-1$; $\mu=0, \dots, k-1$) ein Niveau

$$L_i = -2^k + 2i + 1 \quad (4.95)$$

zugeordnet. Damit haben benachbarte Niveaus den gleichen Abstand

$$D_L = L_{i+1} - L_i = 2 \quad (4.96)$$

und die Niveaus sind symmetrisch zu Null angeordnet. Da jedes Niveau L_i genau durch die eine Kombination $\langle b_{i,\mu} \rangle$ repräsentiert wird, enthält die in Abschnitt 4.2 definierte Menge A_i ebenfalls nur die eine Kombination $\langle b_{i,\mu} \rangle$. Die Menge B_i ist leer für alle i .

Setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise in diesem Abschnitt

$$h_{ÜK}(t) = \tilde{h}(t) \quad (4.97)$$

so wird die Zeitantwort am Ausgang des realen Kanals im Zeitpunkt t_0

$$v(t_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^0 c_{\lambda} \cdot \tilde{h}_{\lambda}(t_0) \quad (4.98)$$

mit

$$c_{\lambda} \in \{L_i\} \quad .$$

Niveaubestimmend ist nur der Summand $c_0 \cdot \tilde{h}_0(t_0)$, so daß man als Aufteilung von $v(t_0)$ entsprechend Gl.(4.18) erhält

$$v(t_0) = c_0 \cdot \tilde{h}_0(t_0) + \sum_{\lambda=-\infty}^{-1} c_{\lambda} \cdot \tilde{h}_{\lambda}(t) \quad (4.99)$$

Da zu jeder Taktzeit jeder Koeffizient c_λ auftreten kann, wird das Maximum des nichtniveaubestimmenden Anteils

$\sum_{\lambda=-\infty}^{-1} c_\lambda \cdot \tilde{h}_\lambda(t_0)$ genau dann angenommen, wenn

$$c_\lambda = \text{Max}_\lambda (c_\lambda) \cdot \text{sign}(\tilde{h}_\lambda(t_0)) \quad (4.100)$$

ist. Da

$$\text{Max}_\lambda (c_\lambda) = 2^k - 1 \quad (4.101)$$

ist, wird

$$\text{Max} \left(\sum_{\lambda=-\infty}^{-1} c_\lambda \cdot \tilde{h}_\lambda(t_0) \right) = (2^k - 1) \cdot \sum_{\lambda=-\infty}^{-1} |\tilde{h}_\lambda(t_0)| = (2^k - 1) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} |\tilde{h}(t_0 + \lambda \cdot T)| \quad (4.102)$$

und mit Hilfe der Gln. (4.29) und (4.30) erhält man für den oberen und unteren Augenrand des i-ten Auges

$$\alpha_{o,i}(t_0) = L_{i+1} \cdot \tilde{h}(t_0) - (2^k - 1) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} |\tilde{h}(t_0 + \lambda \cdot T)| \quad (4.103)$$

$$\alpha_{o,i}(t_0) = (-2^k + 2i + 3) \cdot h_{\text{ÜK}}(t_0) - (2^k - 1) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} |h_{\text{ÜK}}(t_0 + \lambda \cdot T)|$$

und

$$\alpha_{u,i}(t_0) = L_i \cdot \tilde{h}(t_0) + (2^k - 1) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} |\tilde{h}(t_0 + \lambda \cdot T)| \quad (4.104)$$

$$\alpha_{u,i}(t_0) = (-2^k + 2i + 1) \cdot h_{\text{ÜK}}(t_0) + (2^k - 1) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} |h_{\text{ÜK}}(t_0 + \lambda \cdot T)|$$

Wie man leicht nachprüft, ist die Differenz

$$\alpha_{o,i+1}(t_0) - \alpha_{o,i}(t_0) = \alpha_{u,i+1}(t_0) - \alpha_{u,i}(t_0) = D_L \cdot h_{ÜK}(t_0) \quad (4.105)$$

unabhängig von der Nummer des Niveaus.

Beispiele für Augendiagramme bei dieser Codierungsart findet man in [13].

4.5. Vergleich von gemessenen und berechneten Augen anhand eines Beispiels

In Bild 4.10 ist für jeden der ausgewählten Codes ein typisches, am Oszillographen aufgenommenes Augendiagramm und daneben jeweils im gleichen Maßstab das zugehörige berechnete Auge zusammen mit der Zeitantwort $h_{ÜK}(t)$ dargestellt. Es wurde die Realisierung 1 gewählt.

Als Übertragungskanal mit der Übertragungsfunktion $H_{ÜK}^{(R)}(j\omega)$ diente in allen Fällen dasselbe Filter, ein impulsformender Tiefpaß vom Typ 52.05.20:S nach [34] mit einer Sperrgrenze $f_g = 16.7$ kHz, 34 dB minimaler Sperrdämpfung und maximal 0.5 % Überspringen der Sprungantwort. Die Frequenzgänge von Dämpfung und Laufzeit, sowie die Sprungantwort und die Rechteckantwort für $T = 83.3 \mu s$ entsprechend einer Bitrate von 12 kbit/sec sind in Bild 4.9 angegeben. Die Übertragungsrate wurde also, um einen kleinen Augen- und Schrittfehler zu erreichen, sehr klein gewählt. Es ist

$$\ddot{U} = \frac{1/T}{f_g} = \frac{12 \text{ kbit/sec}}{16.7 \text{ kHz}} = 0.72 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}} .$$

Man erkennt qualitativ eine gute Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Augen, obwohl natürlich der kleine Maßstab der Oszillographenbilder einen genauen Vergleich erschwert.

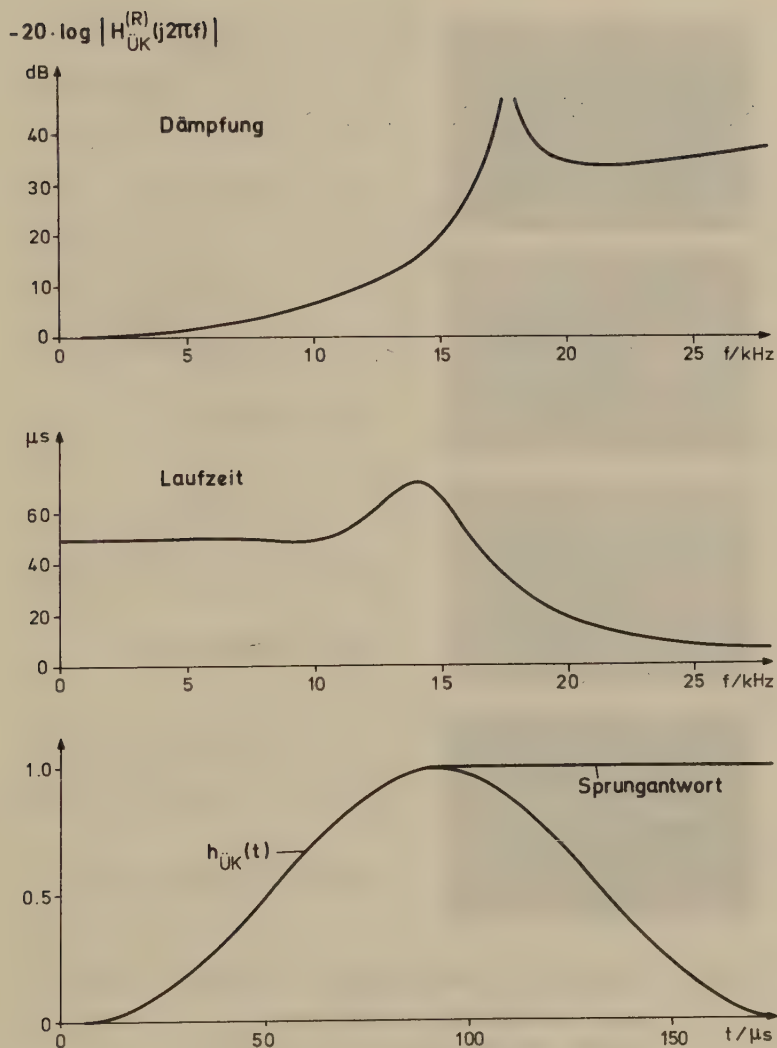
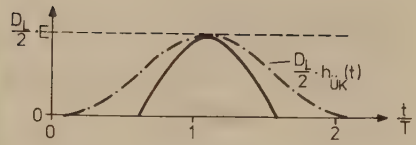
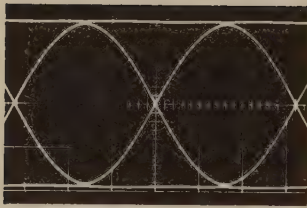
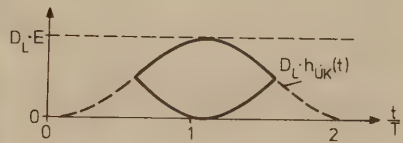
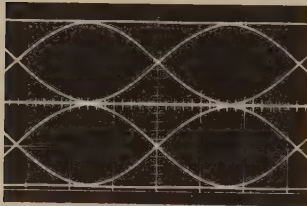


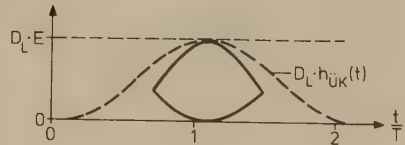
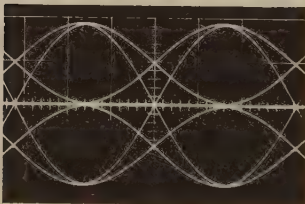
Bild 4.9: Dämpfung, Laufzeit und Zeitantworten für den Impulsformer 52.05.20:S



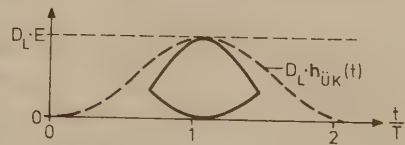
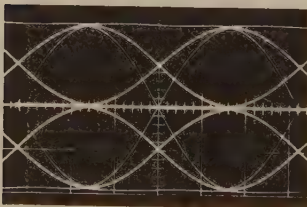
Code I (Binär - bipolar)



Code II (Duobinär)



Code III (Pseudoternär)



Code IV (PR-Klasse 4, $n=3$)

Bild 4.10: Gemessene Augendiagramme und berechnete Augen für den Impulsformer 52.05.20: S

$h_{\text{ÜK}}(t)$ = Rechteckantwort für $T = 83.3 \mu\text{s}$

— Innerer Augenrand ("Auge")

E = Endwert der Sprungantwort, D_L = Niveauabstand

5. Leistungsspektren, Signal- und Störleistung

Von den Effekten, die die Übertragung von Daten störend beeinflussen, wurden im vorangegangenen Kapitel die Impulsinterferenz und deren unmittelbares Abbild, das Augendiagramm, behandelt. Im allgemeinen muß zusätzlich auch die Störung durch Rauschen berücksichtigt werden; denn das dem Datensignal überlagerte Rauschen kann im Entscheider zu Fehlentscheidungen führen. Dabei kommt es wesentlich auf das Verhältnis von Stör- zu Nutzamplitude am Entscheider Eingang an. Da es sich bei der Rauschstörung um einen statistischen Prozeß handelt, läßt sich eine Aussage über die mittlere Rauschamplitude nur auf dem Umweg über die mittlere Störleistung gewinnen; diese wird für gaußverteiltes Rauschen mit Mittelwert Null und konstanter spektraler Leistungsdichte in Abschnitt 5.4 berechnet.

Es ist üblich, die Fehlerwahrscheinlichkeit als Funktion des Signal-/Rauschleistungsverhältnisses oder Störabstandes am Empfängereingang anzugeben (vgl. Kap. 6); der Störabstand wird in Abschnitt 5.3 definiert. Die Rauschleistung ergibt sich nach Wahl einer geeigneten Bezugsbandbreite mit Hilfe der Rauschleistungsdichte. Um die mittlere Signalleistung zu erhalten (Abschnitt 5.2), muß zunächst die spektrale Leistungsdichte des Signals bestimmt werden; dies geschieht in Abschnitt 5.1.

Bild 5.1 zeigt ein vereinfachtes Blockschaltbild des Teils des Übertragungssystems, der für die Ableitungen in diesem Kapitel benötigt wird. Der Vorcodierer wurde weggelassen, da er auf die folgenden Berechnungen keinen Einfluß hat. Unter dem Codierer ist wahlweise der PR-Codierer und der ML-Codierer zu verstehen.

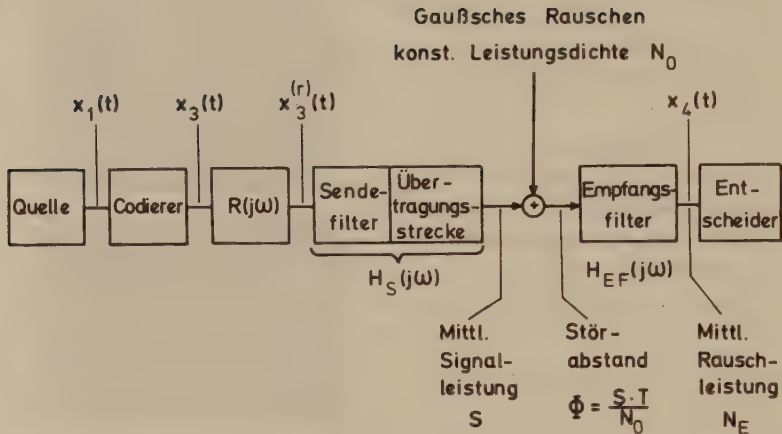


Bild 5.1: Bei der Berechnung von Signal- und Störleistung zugrundegelegtes Blockschaltbild des Übertragungssystems

5.1. Die spektrale Leistungsdichte

5.1.1. Der allgemeine Fall

Sei $x(t)$ ein Vertreter aus einem Ensemble von Zufallsfunktionen und $x_\theta(t)$ ein Ausschnitt der Dauer θ aus $x(t)$, so gilt für die spektrale Leistungsdichte $W_x(\omega)$ von $x(t)$ allgemein ([35], S. 143)

$$W_x(\omega) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{E(|X_\theta(j\omega)|^2)}{\theta} \quad (5.1)$$

Dabei ist $X_\theta(j\omega)$ die Fouriertransformierte von $x_\theta(t)$

$$X_\theta(j\omega) = \mathcal{F}\{x_\theta(t)\} \quad (5.2)$$

und $E(z)$ der Mittelwert über alle möglichen Musterfunktionen z (Scharmittelwert).

Sei nun $x(t)$ speziell ein Datensignal der Form

$$x^{(r)}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{\mu} \cdot g^{(r)}(t - \mu \cdot T) \quad , \quad \tilde{c}_{\mu} \text{ ganzzahlig} \quad (5.3)$$

und $g^{(r)}(t)$ entsprechend Gl.(3.18); in dieser Form lassen sich sowohl ML- als auch PR-codierte Signale darstellen. Ferner sei

$$\Theta = (2m+1) \cdot T \quad (5.4)$$

und

$$x_{\Theta}^{(r)}(t) = \sum_{\mu=-m}^m \tilde{c}_{\mu} \cdot g_{\mu}^{(r)}(t) \quad (5.5)$$

Dann wird

$$X_{\Theta}^{(r)}(j\omega) = \sum_{\mu=-m}^m \tilde{c}_{\mu} \cdot G^{(r)}(j\omega) \cdot e^{-j\mu\omega T} \quad (5.6)$$

Dabei ist die Fouriertransformierte $G^{(r)}(j\omega)$ von $g^{(r)}(t)$ durch

$$G^{(r)}(j\omega) \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathcal{F}\{g^{(r)}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot r_v(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot \delta_v(t)\right\} \cdot \mathcal{F}\{r(t)\} = H_C(j\omega) \cdot R(j\omega) \quad (5.7)$$

(mit $H_C(j\omega)$ gemäß Gl.(3.15)) gegeben und für die Fouriertransformierte $R(j\omega)$ des Rechteckzeichens $r(t)$ gilt

$$R(j\omega) \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathcal{F}\{r(t)\} = \frac{2}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega T}{2} \cdot e^{-j\omega T/2} = T \cdot \text{si} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cdot e^{-j\omega T/2} \quad (5.8)$$

Mit Gl.(5.6) wird

$$|X_{\theta}^{(r)}(j\omega)|^2 = X_{\theta}^{(r)}(j\omega) \cdot (X_{\theta}^{(r)}(j\omega))^* = \sum_{v=-m}^m \sum_{\mu=-m}^m \tilde{c}_v \cdot \tilde{c}_{\mu} \cdot G^{(r)}(j\omega) \cdot (G^{(r)}(j\omega))^* \cdot e^{-jv\omega T} \cdot e^{j\mu\omega T} \quad (5.9)$$

Für den Scharmittelwert $E(|X_{\theta}^{(r)}(j\omega)|^2)$ erhält man zunächst

$$E(|X_{\theta}^{(r)}(j\omega)|^2) = \sum_{v=-m}^m \sum_{\mu=-m}^m E(\tilde{c}_v \cdot \tilde{c}_{\mu}) \cdot |G^{(r)}(j\omega)|^2 \cdot e^{-jv\omega T} \cdot e^{j\mu\omega T} \quad (5.10)$$

Wenn die Koeffizienten $\tilde{c}_v$ und $\tilde{c}_{\mu}$ statistisch voneinander unabhängig sind, so gilt

$$E(\tilde{c}_v \cdot \tilde{c}_{\mu}) = \begin{cases} E(\tilde{c}_v) \cdot E(\tilde{c}_{\mu}) & \text{für } v \neq \mu \\ E(\tilde{c}_v^2) & \text{für } v = \mu \end{cases} \quad (5.11)$$

Sind die $\tilde{c}_v$ symmetrisch zu Null verteilt, so wird

$$E(\tilde{c}_v) = 0 \quad (5.12)$$

und mit den Gln.(5.11) und (5.12) ergibt sich aus Gl.(5.9)

$$E(|X_{\theta}^{(r)}(j\omega)|^2) = \sum_{v=-m}^m E(\tilde{c}_v^2) \cdot |G^{(r)}(j\omega)|^2 \quad (5.13)$$

Kann man für die Folgen $(\tilde{c}_v)$ noch Stationarität voraussetzen, so ist $E(\tilde{c}_v^2)$ unabhängig von v und man erhält mit

$$E(|X_{\theta}^{(r)}(j\omega)|^2) = (2m+1) \cdot E(\tilde{c}_v^2) \cdot |G^{(r)}(j\omega)|^2 \quad (5.14)$$

und Gl.(5.4) aus Gl.(5.1)

$$\begin{aligned} W_x^{(r)}(\omega) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{E(|X_{\theta}^{(r)}(j\omega)|^2)}{\theta} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+1) \cdot E(\tilde{c}_v^2) \cdot |G^{(r)}(j\omega)|^2}{(2m+1) \cdot T} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$W_x^{(r)}(\omega) = \frac{1}{T} \cdot E(\tilde{c}_v^2) \cdot |G^{(r)}(j\omega)|^2$$

5.1.2. Die spektrale Leistungsdichte der behandelten Codes

Es wird das Leistungsspektrum des codierten Signals $x_3^{(r)}(t)$ am Eingang des Sendefilters (vgl. Bild 5.1) berechnet, der darauf hinweisende Index " x_3 " jedoch i.a. der Einfachheit halber weggelassen. Für die PR-Codes wird die Realisierung 1 vorausgesetzt, im Falle der Anwendung von Realisierung 2 ist die spektrale Leistungsdichte am Sendefiltereingang identisch mit derjenigen für Code I.

Bei ML-Codierung ist $g^{(r)}(t) = r(t)$ und daher mit den Gln.(5.7) und (5.8)

$$\frac{1}{T} \cdot |G_{ML}^{(r)}(j\omega)|^2 = \frac{1}{T} \cdot |R(j\omega)|^2 = T \cdot \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2 \quad (5.16)$$

Für die Koeffizienten $\tilde{c}_v$ sind hier die $c_v \in \{L_i\}$ mit L_i entsprechend Gl.(4.95) einzusetzen, sodaß sich für den Mittelwert $E(\tilde{c}_v^2)$ der 2^k möglichen Niveaus L_i

$$E(\tilde{c}_v^2) = E(c_v^2) = \sum_{i=0}^{2^k-1} L_i^2 \cdot p_{c_v}(L_i) \quad (5.17)$$

ergibt. Die Wahrscheinlichkeit $p_{c_v}(L_i)$, daß c_v den Wert L_i annimmt, ist unabhängig von v

$$p_{c_v}(L_i) = \frac{1}{2^k} \quad ; \quad (5.18)$$

da weiterhin $L_i = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm 2^{k-1}$ (vgl. Gl.(4.95)), folgt aus Gl.(5.17)

$$\begin{aligned} E(c_v^2) &= \frac{1}{2^k} \cdot 2 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2^{k-1})^2) \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{2^{k-1} (2^{2k} - 1)}{3} \\ &= \frac{2^{2k} - 1}{3} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Durch Einsetzen der Gln.(5.16) und (5.19) in Gl.(5.15) erhält man für das Leistungsspektrum $w_{x_3}^{(r)}(\omega)$ von $x_3^{(r)}(t)$ bei redundanzfreier Mehrstufencodierung

$$w_{ML}^{(r)}(\omega) = \frac{2^{2k}-1}{3} \cdot T \cdot \left| \text{si}(\omega T/2) \right|^2 \quad (5.20)$$

Beim Code I ist $k=1$ und mit Gl.(5.20) ergibt sich

$$w_I^{(r)}(\omega) = T \cdot \left| \text{si}(\omega T/2) \right|^2 \quad (5.21)$$

Bei PR-Codierung ist das Signal $x_3^{(r)}(t)$ allgemein durch

$$x_3^{(r)}(t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \cdot r_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} b_{\lambda} \cdot g_{\lambda}^{(r)}(t) \quad (5.22)$$

gegeben (vgl. z.B. Bild 3.4). Folglich sind für die $\tilde{c}_v$ in Gl.(5.15) die binären Koeffizienten $b_v \in \{1, -1\}$ einzusetzen und es gilt

$$E(\tilde{c}_v^2) = E(b_v^2) = 1 \quad (5.23)$$

Mit den Gln.(5.23), (5.15), (5.7), (5.8) und (3.15) ergibt sich daher für das Leistungsspektrum PR-codierter Signale allgemein

$$\begin{aligned} w_{PR}^{(r)}(\omega) &= \frac{1}{T} \cdot \left| G^{(r)}(j\omega) \right|^2 \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left| H_C(j\omega) \cdot R(j\omega) \right|^2 \\ &= T \cdot \left| \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2 \cdot \left| \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot e^{-jv\omega T} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Durch Einsetzen der PR-Koeffizienten d_v erhält man für den Code II

$$W_{II}^{(r)}(\omega) = 4 \cdot T \cdot \left| \text{si} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2 \cdot \left| \cos \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2, \quad (5.25)$$

für den Code III

$$W_{III}^{(r)}(\omega) = 4 \cdot T \cdot \left| \text{si} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2 \cdot \left| \sin \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2 \quad (5.26)$$

und für den Code IV

$$W_{IV}^{(r)}(\omega) = 4 \cdot T \cdot \left| \text{si} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2 \cdot \left| \sin(\omega T) \right|^2, \quad (5.27)$$

Der Frequenzgang der durch Gl.(5.21) und die Gln.(5.25)-(5.27) gegebenen spektralen Leistungsdichten ist in Bild 3.6 dargestellt.

5.2. Die mittlere Signalleistung am Empfängereingang

Am Ausgang der Übertragungsstrecke bzw. am Eingang des Empfängers (vgl. Bild 1.1 und Bild 5.1) tritt das Signal mit der mittleren Leistung S auf. Legt man als PR-Einzelzeichen wieder $g^{(r)}(t)$ zugrunde, so ergibt sich S durch Integration über die durch Sendefilter und Übertragungsstrecke modifizierte spektrale Leistungsdichte $w_{x_3}^{(r)}(\omega)$ des Signals $x_3(t)$:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_{x_3}^{(r)}(\omega) \cdot |H_{SF}(j\omega)|^2 \cdot |H_{US}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_{x_3}^{(r)}(\omega) \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.28)$$

In $H_S(j\omega)$ wurden die Übertragungsfunktionen von Sendefilter und Übertragungsstrecke zusammengefaßt:

$$H_S(j\omega) = H_{SF}(j\omega) \cdot H_{US}(j\omega) \quad (5.29)$$

Zur Berechnung von S bei den ausgewählten Codes ist für $W_{x_3}^{(r)}(\omega)$ jeweils die spektrale Leistungsdichte entsprechend den Gln. (5.21), (5.25)-(5.27) einzusetzen.

Bei bekannten Polen und Nullstellen von $H_S(s)$ läßt sich S in Anlehnung an ein in [36] verwendetes Verfahren über den Residuensatz geschlossen auswerten. Dies ist nicht nur von theoretischem sondern im Hinblick auf die gegenüber einer numerischen Auswertung mögliche Rechenzeiterparnis bei einer Optimierung (vgl. Kap. 7) auch von praktischem Interesse. Da die Ableitung der allgemeinen, für alle PR-Codes gültigen Beziehung etwas umfangreicher ist, wird sie im Anhang durchgeführt und hier werden lediglich die Ergebnisse angegeben, die man für die ausgewählten Codes erhält.

Für binär-bipolare Codierung ergibt sich

$$S_I^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_I^{(r)}(\omega) \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{si} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2 \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.30)$$

und für den Fall, daß $H_S(s)$ nur einfache Pole aufweist

$$S_I^{(r)} = \frac{2}{T} \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{\hat{e}_{\mu} \cdot H_S(-s_{\infty\mu})}{(s_{\infty\mu})^2} \cdot \left(e^{s_{\infty\mu} \cdot T} - 1 \right) + |H_S(0)|^2 \quad (5.31)$$

Dabei sind $s_{\infty\mu}$ ($\mu=1, \dots, M$) die Pole von $H_S(s)$ und $\hat{e}_{\mu}$ das zum Pol $s_{\infty\mu}$ gehörende Residuum von $H_S(s)$; es gilt

$$\hat{e}_{\mu} = \lim_{s \rightarrow s_{\infty\mu}} [(s - s_{\infty\mu}) \cdot H_S(s)] \quad (5.32)$$

Die mittlere Signalleistung $S_{II}^{(r)}$ für das duobinär codierte Signal am Ausgang der Übertragungsstrecke ist

$$S_{II}^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{II}^{(r)}(\omega) \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{si} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2 \cdot \left| \cos \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|^2 \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.33)$$

bzw.

$$S_{II}^{(r)} = \frac{2}{T} \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{\hat{e}_{\mu} \cdot H_S(-s_{\infty\mu})}{(s_{\infty\mu})^2} \cdot \left(e^{2s_{\infty\mu} \cdot T} - 1 \right) + 2 \cdot |H_S(0)|^2 \quad (5.34)$$

Bei pseudoternärer Codierung ergibt sich

$$S_{III}^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{III}^{(r)}(\omega) \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2 \cdot \left| \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2 \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.35)$$

und

$$S_{III}^{(r)} = \frac{2}{T} \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{\hat{e}_{\mu} \cdot H_S(-s_{\infty\mu})}{(s_{\infty\mu})^2} \cdot \left(-e^{2s_{\infty\mu} \cdot T} + 4e^{s_{\infty\mu} \cdot T} - 3 \right) + 2 \cdot |H_S(0)|^2 \quad (5.36)$$

Für ein Signal, das nach Kl. 4, $n=3$ codiert ist, erhält man für die mittlere Signalleistung $S_{IV}^{(r)}$ am Ausgang der Übertragungsstrecke

$$S_{IV}^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{IV}^{(r)}(\omega) \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2 \cdot \left| \sin(\omega T) \right|^2 \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.37)$$

und

$$S_{IV}^{(r)} = \frac{2}{T} \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{\hat{e}_{\mu} \cdot H_S(-s_{\infty\mu})}{(s_{\infty\mu})^2} \cdot \left(-e^{3s_{\infty\mu} \cdot T} + 2e^{2s_{\infty\mu} \cdot T} + e^{s_{\infty\mu} \cdot T} - 2 \right) + 2 \cdot |H_S(0)|^2 \quad (5.38)$$

Bei der Anwendung der hier angegebenen Beziehungen für die mittlere Signalleistung ist zu beachten, daß entsprechend den Ausführungen in den Kapiteln 3 und 4 bei allen Codes ein Niveauabstand $D_L=2$ am Codiererausgang vorausgesetzt wurde. D. h. beim Code I treten dort die Niveaus ± 1 , bei den übrigen Codes die Niveaus 0 und ± 2 auf.

5.3. Der Störabstand am Empfängereingang

Der in den folgenden Kapiteln verwendete Störabstand Φ ergibt sich aus der mittleren Signalleistung S am Empfängereingang, dem Impulsabstand T und der einseitigen

Rauschleistungsdichte N_0 durch die Beziehung

$$\Phi = \frac{S \cdot T}{N_0} = \frac{E_T}{N_0} \quad (5.39)$$

$E_T = S \cdot T$ stellt dabei die mittlere Signalenergie je Schritt dar.

Mit dem bekannten Signal-/Rauschleistungsverhältnis S/N steht Φ in dem Zusammenhang

$$\frac{S}{N} = \frac{\Phi}{\beta_N \cdot T} = \frac{E_T}{N_0 \cdot \beta_N \cdot T} \quad (5.40)$$

Dabei ist β_N die Bandbreite des eingekoppelten Rauschens. In Φ geht β_N nicht explizit ein. Über Gl.(5.40) ist jedoch auch noch folgende Interpretation möglich:

Φ ist gleich S/N , wenn die Rauschbandbreite β_N gleich dem reziproken Impulsabstand $1/T$ und damit zahlenmäßig gleich der Schrittgeschwindigkeit gewählt wird.

$$\Phi = \frac{E_T}{N_0} = \frac{E_T}{(N_0 \cdot \frac{1}{T}) \cdot T} = \left(\frac{S}{N} \right)_{\beta_N = \frac{1}{T}} \quad (5.41)$$

5.4. Die mittlere Störleistung am Entscheidereingang

Am Empfängereingang werde additiv Rauschen eingekoppelt (vgl. Bild 5.1), das eine Gaußsche Amplitudendichteverteilung mit Mittelwert 0 und eine konstante einseitige spektrale Leistungsdichte N_0 aufweist. Dieses Rauschen tritt am Entscheidereingang, modifiziert durch den Frequenzgang des Empfangsfilters, mit der mittleren Leistung N_E auf. Man erhält N_E durch Integration über die spektrale Leistungsdichte $\frac{1}{2} N_0 \cdot |H_{EF}(j\omega)|^2$:

$$N_E = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} N_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.42)$$

Wie schon die mittlere Signalleistung S , so läßt sich auch N_E mit Hilfe des Residuensatzes geschlossen berechnen. Die Berechnung wird im folgenden durchgeführt:

Durch Anwendung der Parsevalschen Beziehung und des komplexen Faltungssatzes (siehe z. B. [37]) auf Gl.(5.42) erhält man zunächst

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} |h_{EF}(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} h_{EF}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_{EF}(s) \cdot H_{EF}(-s) ds. \quad (5.43)$$

Ferner gilt der Residuensatz

$$\oint_C \tilde{H}(s) ds = 2\pi j \cdot \sum \varepsilon_{\mu}. \quad (5.44)$$

Dabei sind ε_{μ} die Residuen von $\tilde{H}(s)$ zu den vom Weg C umschlossenen Polen. Um den Residuensatz anwenden zu können, müssen zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

- 1) $\tilde{H}(s)$ ist in dem Gebiet $\mathcal{G}$, in dem C verläuft, eindeutig und regulär.
- 2) C ist ein doppelpunktfreier geschlossener Weg in $\mathcal{G}$, in dessen Innengebiet nur endlich viele Pole liegen.

Für

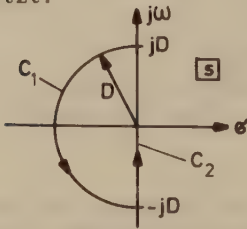
$$\tilde{H}(s) = H_{EF}(s) \cdot H_{EF}(-s) \quad (5.45)$$

kann die erste Voraussetzung als gegeben angenommen werden. Um auch der zweiten Voraussetzung zu genügen, wird C im folgenden geeignet gewählt.

Wir betrachten nun das Integral

$$\oint_C \tilde{H}(s) ds = \int_{C_1} \tilde{H}(s) ds + \int_{C_2} \tilde{H}(s) ds, \quad (5.46)$$

wobei sich der Weg C gemäß Bild 5.2 aus C_1 und C_2 zusammensetzt:



C_1 : Halbkreis (Radius D) durch die linke s -Halbebene.

C_2 : Entlang der $j\omega$ -Achse von $-jD$ nach $+jD$.

Bild 5.2: Zur Wahl der Integrationswege bei der Anwendung des Residuensatzes auf $\tilde{H}(s)$ gemäß Gl.(5.45)

Innerhalb des Weges C liegen nur Pole von $H_{EF}(s)$; da ferner für praktisch sinnvolle Empfangsfilter vorausgesetzt werden kann, daß der Nennergrad von $H_{EF}(s)$ größer ist als der Zählergrad⁴⁾, gilt

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \int_{C_1} \tilde{H}(s) ds = 0. \quad (5.47)$$

Folglich ist

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \oint_C \tilde{H}(s) ds = \lim_{D \rightarrow \infty} \left(\int_{C_1} \tilde{H}(s) ds + \int_{-jD}^{+jD} \tilde{H}(s) ds \right) = \int_{-j\infty}^{+j\infty} \tilde{H}(s) ds. \quad (5.48)$$

Sei

$$C_\infty = \lim_{D \rightarrow \infty} C, \quad (5.49)$$

so erhält man aus den Gln.(5.44) und (5.48)

$$\oint_{C_\infty} \tilde{H}(s) ds = \int_{-j\infty}^{+j\infty} \tilde{H}(s) ds = 2\pi j \cdot \sum e_\mu. \quad (5.50)$$

Dabei sind e_μ die Residuen zu den Polen $s_{\infty\mu}$ von $\tilde{H}(s)$, die in der linken offenen s -Halbebene liegen. Setzt man voraus, daß $H_{EF}(s)$ nur einfache Pole aufweist, so gilt

⁴⁾ Damit werden z. B. sprunghafige Systeme ausgeschlossen

$$\tilde{e}_{\mu} = \lim_{s \rightarrow s_{\infty\mu}} [(s - s_{\infty\mu}) \cdot \underline{H}(s)] = \lim_{s \rightarrow s_{\infty\mu}} [(s - s_{\infty\mu}) \cdot H_{EF}(s) \cdot H_{EF}(-s)] \quad (5.51)$$

Da von $\underline{H}(s) = H_{EF}(s) \cdot H_{EF}(-s)$ nur der Faktor $H_{EF}(s)$ Pole in der linken Halbebene hat, kann man für Gl.(5.51) auch schreiben

$$\tilde{e}_{\mu} = \lim_{s \rightarrow s_{\infty\mu}} [(s - s_{\infty\mu}) \cdot H_{EF}(s)] \cdot H_{EF}(-s_{\infty\mu}) = \tilde{e}_{\mu} \cdot H_{EF}(-s_{\infty\mu}) \quad (5.52)$$

Sei M der Grad der Übertragungsfunktion $H_{EF}(s)$, so erhält man aus den Gln.(5.43), (5.50) und (5.52)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_{EF}(s) \cdot H_{EF}(-s) ds = \sum_{\mu=1}^M \tilde{e}_{\mu} = \sum_{\mu=1}^M \tilde{e}_{\mu} \cdot H_{EF}(-s_{\infty\mu}) \quad (5.53)$$

Diese Darstellung läßt sich noch vereinheitlichen, wenn man $H_{EF}(s)$ durch Pole und Residuen ausdrückt:

$$H_{EF}(s) = \sum_{v=1}^M \frac{\tilde{e}_v}{s - s_{\infty v}} \quad (5.54)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}(j\omega)|^2 d\omega &= \sum_{\mu=1}^M \tilde{e}_{\mu} \cdot \left[\sum_{v=1}^M \frac{\tilde{e}_v}{s - s_{\infty v}} \right]_{s = -s_{\infty\mu}} \\ &= \sum_{\mu=1}^M \tilde{e}_{\mu} \cdot \left[- \sum_{v=1}^M \frac{\tilde{e}_v}{s_{\infty\mu} + s_{\infty v}} \right] \\ &= - \sum_{\mu=1}^M \sum_{v=1}^M \frac{\tilde{e}_{\mu} \cdot \tilde{e}_v}{s_{\infty\mu} + s_{\infty v}} \end{aligned} \quad (5.55)$$

und für die mittlere Störleistung N_E am Entscheidungseingang schließlich

$$N_E = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} N_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}(j2\pi f)|^2 df = - \frac{N_0}{2} \cdot \sum_{\mu=1}^M \sum_{v=1}^M \frac{\tilde{e}_{\mu} \cdot \tilde{e}_v}{s_{\infty\mu} + s_{\infty v}}$$

(5.56)

6. Die Fehlerwahrscheinlichkeit

6.1. Allgemeines

6.1.1. Definition und Ursache eines Bitfehlers

Vergleicht man die gesendete Bitfolge am Ausgang der Quelle mit der empfangenen am Eingang der Senke, so sind Bitfehler aufgetreten, wenn diese beiden Folgen bei Berücksichtigung der zeitlichen Verschiebung durch den gesamten Übertragungskanal nicht identisch sind.

Setzt man ein offenes Auge ($\Delta\alpha < 1$) und einen sinnvoll gewählten Abtastzeitpunkt voraus, so ist im Rahmen des vorausgesetzten Modells des Übertragungssystems das Gaußsche Rauschen die einzige Störquelle, die einen Fehler verursacht haben kann. Nach Voraussetzung werden Signal und Rauschen additiv überlagert; am Entscheideringang tritt also im Abfragezeitpunkt t_A die Summe von ungestörtem Signal $v_i^{(\mu)}(t_A)$ und Rauschen $\tilde{n}(t_A)$ auf. Innerhalb dieses Kapitels werden alle Betrachtungen für $t = t_A$ durchgeführt; daher werden die beiden folgenden Abkürzungen verwendet:

$$v_i^{(\mu)}(t_A) \stackrel{\text{Def.}}{=} v_i^{(\mu)} \quad (6.1)$$

$$\tilde{n}(t_A) \stackrel{\text{Def.}}{=} \tilde{n} \quad (6.2)$$

Wie durch den Index i angedeutet, ist $v_i^{(\mu)}$ dem Niveau l_i zuzuordnen; es gilt also

$$Q_{i-1} < v_i^{(\mu)} < Q_i \quad (6.3)$$

Wenn nun entweder ein Augenblickswert des Rauschens $\tilde{n} > 0$ auftritt, derart daß

$$Q_{i+1} < x_A(t_A) = v_i^{(\mu)} + \tilde{n} < Q_{i+1} \quad (6.4)$$

$$l > 0, \quad i+1 \leq Z-1$$

oder ein $\tilde{n} < 0$, derart daß

$$Q_{i-1} < x_A(t_A) = v_i^{(\mu)} + \tilde{n} < Q_{i-1}, \quad (6.5)$$

$$l > 0, \quad i-1 \geq 0$$

so wird im Zeitpunkt t_A eine falsche Entscheidung getroffen. Denn im ersten Fall (Gl.(6.4)) wird das empfangene Signal $v_i^{(\mu)} + \tilde{n}$ dem Niveau L_{i+1} im zweiten Fall (Gl.(6.5)) dem Niveau L_{i-1} zugeordnet. Bei bitweiser Codierung wird jeweils ein Bit, bei redundanzfreier Mehrstufencodierung können bis zu k Bits verfälscht werden. Es interessiert nun die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung, im geschilderten Fall also, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei gegebenem $v_i^{(\mu)}$ ein $\tilde{n}$ mit der Eigenschaft

$$Q_{i+1} - v_i^{(\mu)} < \tilde{n} < Q_{i+1} - v_i^{(\mu)} \quad (6.6)$$

bzw.

$$Q_{i-1} - v_i^{(\mu)} < \tilde{n} < Q_{i-1} - v_i^{(\mu)} \quad (6.7)$$

auftritt. Allgemein wird im folgenden Abschnitt die Wahrscheinlichkeit berechnet, mit der der Augenblickswert des Rauschens innerhalb der Grenzen $\tilde{n} = \tilde{n}_u$ und $\tilde{n} = \tilde{n}_o$ liegt.

6.1.2. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Rauschamplitude innerhalb eines vorgegebenen Intervalls liegt

Für Gaußsches Rauschen mit dem linearen Mittelwert 0 und der Streuung $\chi_{\tilde{n}}$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Augenblickswerte $\tilde{n}$ des Rauschens

$$p_{\tilde{n}}(\xi) = \frac{1}{\chi_{\tilde{n}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2\chi_{\tilde{n}}^2}} \quad (6.8)$$

Die Wahrscheinlichkeit $\Psi(\tilde{n}_u < \tilde{n} < \tilde{n}_o)$, daß $\tilde{n}$ zwischen $\tilde{n}_u$ und $\tilde{n}_o$ liegt, erhält man durch Integration von $p_{\tilde{n}}(\xi)$ innerhalb dieser Grenzen:

$$\Psi(\tilde{n}_u < \tilde{n} < \tilde{n}_o) = \int_{\tilde{n}_u}^{\tilde{n}_o} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi = \int_{\tilde{n}_u}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi - \int_{\tilde{n}_o}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi \quad (6.9)$$

Führt man zur Vereinfachung der Schreibweise die komplementäre Fehlerfunktion

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (6.10)$$

ein, so wird z. B.

$$\int_{\tilde{n}_u}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\tilde{n}_u}{\chi_{\tilde{n}} \sqrt{2}} \right) \quad (6.11)$$

und Gl.(6.9) läßt sich in der Form

$$\Psi(\tilde{n}_u < \tilde{n} < \tilde{n}_o) = \frac{1}{2} \left[\text{erfc} \left(\frac{\tilde{n}_u}{\chi_{\tilde{n}} \sqrt{2}} \right) - \text{erfc} \left(\frac{\tilde{n}_o}{\chi_{\tilde{n}} \sqrt{2}} \right) \right] \quad (6.12)$$

schreiben.

Unter den über die statistischen Eigenschaften der Rauschstörung gemachten Voraussetzungen ist das Quadrat der Streuung $\chi_{\tilde{n}}$ gleich der mittleren Leistung des Rauschens.

Da wir uns im Hinblick auf die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit speziell für die Störleistung N_E am Entscheidungseingang interessieren, ist im folgenden

$$\chi_{\tilde{n}}^2 = N_E \quad \text{bzw.} \quad \chi_{\tilde{n}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2N_E} \stackrel{\text{Def.}}{=} U. \quad (6.13)$$

Z. B. ergibt sich so für den durch Gl.(6.6) beschriebenen Fall

$$\Psi(Q_{i+1} - v_i^{(\mu)} < \tilde{n} < Q_{i+1} - v_i^{(\mu)}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_{i+1} - v_i^{(\mu)}}{U} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{Q_{i+1} - v_i^{(\mu)}}{U} \right) \right]. \quad (6.14)$$

6.2. Mittlere und worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit

6.2.1. Berechnung nach der direkten Methode

Bei der direkten Methode ("exhaustive method"; vgl. z.B. [13], Abschnitt 4.2.1) zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit wird zunächst für jeden der im Abtastzeitpunkt t_A möglichen und mit der Wahrscheinlichkeit $p_{v_i^{(\mu)}}$ auftretenden Signalwerte $v_i^{(\mu)}$ die Wahrscheinlichkeit $\Psi_{i,\mu}$ für das Auftreten eines Momentanwertes des Rauschens berechnet, die zu einem Fehler führt. Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\Psi}$ erhält man dann aus der Summe $\sum_i \sum_{\mu} p_{v_i^{(\mu)}} \cdot \Psi_{i,\mu}$. Der für die Entscheidung ungünstigste Fall liegt vor, wenn man annimmt, das Nutzsignal könne nur Werte annehmen, die auf dem inneren Augenrand liegen, wenn also $v_i^{(\mu)} \equiv \alpha_{u,i}(t_A)$ oder $v_i^{(\mu)} \equiv \alpha_{o,i-1}(t_A)$ ist. Aus der Untersuchung dieses Falles ergibt sich die worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit Ψ_{wc} . Im Grenzfall verschwindenden Augenfehlers ($\Delta\alpha \rightarrow 0$) wird im optimalen Abtastzeitpunkt $\bar{\Psi} = \Psi_{wc}$.

Beide Fälle müssen bei der Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit berücksichtigt werden; sie sind in Bild 6.1 für $\mu=4$ angedeutet.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Momentanwerten des Rauschens entsprechend den Gln.(6.15) und (6.16) ergibt sich aus Abschnitt 6.1.2 zu

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,\mu}^{(ML)}(\Phi, Q_i, t_A) &= \psi(\tilde{n} > Q_i - v_i^{(\mu)}) + \psi(\tilde{n} < Q_{i-1} - v_i^{(\mu)}) \\
 &= \int_{Q_i - v_i^{(\mu)}}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{-(v_i^{(\mu)} - Q_{i-1})} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi \\
 &= \int_{Q_i - v_i^{(\mu)}}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi + \int_{v_i^{(\mu)} - Q_{i-1}}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_i - v_i^{(\mu)}}{U} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{v_i^{(\mu)} - Q_{i-1}}{U} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Berechnet man diese Fehlerwahrscheinlichkeit für alle Indizes i und μ und berücksichtigt noch die Auftrittswahrscheinlichkeit $p_{v_i^{(\mu)}}$ der Werte $v_i^{(\mu)}$ des Nutzsignals, so erhält man die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\psi}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A)$ aus der Beziehung

$$\bar{\psi}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = \sum_{i=1}^{Z-1} \sum_{\mu} p_{v_i^{(\mu)}} \cdot \psi_{i,\mu}^{(ML)}(\Phi, Q_i, t_A). \tag{6.18}$$

Im Vektor $\underline{Q}$ mit

$$\underline{Q} = (Q_{-1}, Q_0, \dots, Q_{Z-2}, Q_{Z-1}) \tag{6.19}$$

wurden die Schwellen Q_i zusammengefaßt. Damit ist auch eine bezüglich der Niveaus unsymmetrische Verteilung der Schwellen zugelassen. Um zu der geschlossenen Darstellung gemäß Gl.(6.18) zu kommen, wurden ferner die zusätzlichen Schwellen Q_{-1} und Q_{Z-1} mit

$$Q_{-1} \rightarrow -\infty \quad \text{und} \quad Q_{Z-1} \rightarrow \infty \quad (6.20)$$

eingeführt.

Bevor die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit bei ML-Codierung weitergeführt wird, ist hier eine Erläuterung erforderlich.

Durch Gl.(6.18) ist die Schrittfehlerwahrscheinlichkeit bei ML-Codierung gegeben. Da pro Schritt k Bits übertragen werden, ist diese nicht identisch mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Unter den beiden folgenden meistens erfüllten Annahmen stimmen Schritt- und Bitfehlerwahrscheinlichkeit jedoch näherungsweise überein:

- 1) Es wurde ein Zuordnungsschema gewählt, bei dem sich die benachbarten Niveaus zuzuordnenden Bitkombinationen nur in einem Bit unterscheiden (vgl. Abschnitt 3.2).
- 2) Der Störabstand Φ ist so groß, daß ein Signalwert, der ohne Rauschstörung dem Niveau L_i zugeordnet worden wäre, nur mit einer vernachlässigbar kleinen Wahrscheinlichkeit einem Niveau $L_{i \pm v}$ mit $v > 1$ zugeordnet wird.

Nach dieser Erläuterung wird nun die Berechnung von $\bar{\Psi}(\text{ML})$ aus Gl.(6.18) fortgeführt.

Die Auftretswahrscheinlichkeit $p_{v_1^{(\mu)}}$ ist für alle Werte $v_i^{(\mu)}$ des Nutzsignals gleich

$$p_{v_1^{(\mu)}} \stackrel{\text{Def.}}{=} p_v \quad (6.21)$$

und man erhält mit $Z = 2^k$ durch Einsetzen von Gl.(6.17) in Gl.(6.18)

$$\bar{\Psi}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = \frac{1}{2} p_v \cdot \sum_{i=0}^{2^k-1} \sum_{\mu} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_i - v_i^{(\mu)}}{U} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{v_i^{(\mu)} - Q_{i-1}}{U} \right) \right] \quad (6.22)$$

Um Gl.(6.22) zur Berechnung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit praktisch anwenden zu können, muß p_v bekannt sein. Zur Bestimmung von p_v dient die folgende Überlegung. Man nimmt an, die Impulsantwort $h_{iJK}(t)$ des Übertragungskanals auf ein Einzelzeichen verschwinde für $t > (K+1) \cdot T$ ($K > 0$ ganzzahlig). Da ferner im Zusammenhang mit den später behandelten Optimierungsbeispielen nur kausale Systeme betrachtet werden, bedeutet das

$$h_{iJK}(t) \equiv 0 \quad \text{für } t < 0 \quad \text{und} \quad t > (K+1) \cdot T \quad (6.23)$$

Mit den Gln.(4.19) und (4.99) sowie der Abkürzung $h_{iJK}(t) \equiv \tilde{h}(t)$ wie in Abschnitt 4.4.3.6 wird

$$v_i^{(\mu)}(t_A) = v_i^{(\mu)} = c_0^{(\mu)} \cdot \tilde{h}(t_A) + \sum_{\lambda=-K}^{-1} c_{\lambda}^{(\mu)} \cdot \tilde{h}_{\lambda}(t_A) = v_{i,\mu}(t_A) + \tilde{v}_{\mu}(t_A) \quad (6.24)$$

wobei der niveaubestimmende Anteil von $v_i^{(\mu)}$

$$c_0^{(\mu)} \cdot \tilde{h}(t_A) = L_i \cdot \tilde{h}(t_A) = v_{i,\mu}(t_A) \stackrel{\text{Def.}}{=} v_i \quad (6.25)$$

und der nicht niveaubestimmende Anteil

$$\sum_{\lambda=-K}^{-1} c_{\lambda}^{(\mu)} \cdot \tilde{h}_{\lambda}(t_A) = \tilde{v}_{\mu}(t_A) \stackrel{\text{Def.}}{=} \tilde{v}_{\mu} \quad (6.26)$$

gesetzt wurde.

Der Wert $v_i^{(\mu)}$ des Nutzsignals hängt also von den Werten der $K+1$ Zeitantworten $\tilde{h}_\lambda(t)$ ($\lambda=-K, \dots, 0$) in t_A oder m.a.W. von den $K+1$ Abtastwerten $\tilde{h}(t_A - \lambda \cdot T)$ der Zeitantwort $\tilde{h}(t)$ ab.

Da die Koeffizienten $c_\lambda^{(\mu)}$ bei Z Stufen Z verschiedene Werte annehmen können, gibt es insgesamt Z^{K+1} mögliche Signalwerte $v_i^{(\mu)}$, die mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}_v$ auftreten. Es ist

$$\tilde{p}_v = \frac{1}{Z^{K+1}} \quad (6.27)$$

Berücksichtigt man, daß Gl.(6.23) i.a. nur näherungsweise erfüllt ist und daß es pro Niveau $Z^{K+1}/Z \cdot Z^K$ Signalwerte $v_i^{(\mu)}$ gibt, so läßt sich die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit ausführlicher in der Form

$$\tilde{\Psi}^{(ML)}(\Phi, Q, t_A) = \frac{1}{2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{Z^{K+1}} \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{\mu=0}^{Z^K-1} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_i - v_i^{(\mu)}}{U} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{v_i^{(\mu)} - Q_{i-1}}{U} \right) \right] \right) \quad (6.28)$$

angeben. In Gl.(6.22) und im folgenden ist die Schreibweise $p_v \cdot \sum_{\mu} \dots$ stets als Abkürzung für den Ausdruck

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{Z^{K+1}} \cdot \sum_{\mu=0}^{Z^K-1} \dots = \lim_{K \rightarrow \infty} \tilde{p}_v \cdot \sum_{\mu=0}^{Z^K-1} \dots$$

zu verstehen.

Legt man den praktisch immer gegebenen Fall

$$Q_i = (v_i + v_{i+1}) / 2 \quad i = 0, \dots, Z-2 \quad (6.29)$$

zugrunde, so läßt sich Gl.(6.22) durch Ausnutzung der Symmetrien im Augendiagramm und der Verteilungsdichte $p_{\tilde{n}}$ der Momentanwerte des Rauschens erheblich vereinfachen. Im einzelnen sind dies die Symmetrie des Augendiagramms zur Zeitachse, die Symmetrie der Signalwerte $v_i^{(\mu)}$ bzgl. v_i und die Symmetrie von $p_{\tilde{n}}$ bzgl. 0. Das Ergebnis ist bekannt (vgl. z.B.

[13], [31]). Dennoch wird die Herleitung hier durchgeführt, um auf die Unterschiede zwischen ML- und PR-Codierung hinweisen zu können.

Es wird zunächst der Beitrag $\tilde{\psi}_i^{(ML)}$ der Fehlerwahrscheinlichkeit zu $\bar{\psi}^{(ML)}$ für alle Signalwerte $v_i^{(\mu)}$ zwischen den Schwellen Q_{i-1} und Q_i bestimmt; er ergibt sich aus Gl.(6.17) durch Summation über μ :

$$\tilde{\psi}_i^{(ML)} = p_v \cdot \sum_{\mu} \psi_{i,\mu}^{(ML)} \quad (6.30)$$

$$= \frac{1}{2} p_v \cdot \sum_{\mu} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_i - v_i^{(\mu)}}{U} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{v_i^{(\mu)} - Q_{i-1}}{U} \right) \right]$$

$i = 0, \dots, Z-1$

Mit den Gln.(6.24) und (6.29) wird

$$Q_i - v_i^{(\mu)} = Q_i - v_i - \tilde{v}_{\mu} \stackrel{\text{Def.}}{=} \hat{v}(t_A) - \tilde{v}_{\mu} \quad (6.31)$$

und

$$v_i^{(\mu)} - Q_{i-1} = \hat{v} - Q_{i-1} + \tilde{v}_{\mu} = \hat{v}(t_A) + \tilde{v}_{\mu} \quad (6.32)$$

mit der Abkürzung

$$Q_i - v_i = v_i - Q_{i-1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \hat{v}(t_A) \stackrel{\text{Def.}}{=} \hat{v} \quad (6.33)$$

In Bild 6.2 ist die Bedeutung der Größen $v_i = v_i(t_A)$ aus Gl.(6.25), $\tilde{v}_{\mu} = \tilde{v}_{\mu}(t_A)$ aus Gl.(6.26) und $\hat{v} = \hat{v}(t_A)$ aus Gl.(6.33) im Rahmen des Augendiagramms verdeutlicht.

Die Verteilung des niveaun unabhängigen Anteils $\tilde{v}_{\mu}$ ist unabhängig von i symmetrisch zu Null; daher sind die Signalwerte $v_i^{(\mu)}$ symmetrisch um den niveaubestimmenden Anteil v_i verteilt. D.h. zu jedem $v_i^{(\mu)} = v_i + \tilde{v}_{\mu}$ gibt es ein $v_i^{(v)} = v_i - \tilde{v}_{\mu}$ mit der Eigenschaft $v_i^{(v)} = v_i - \tilde{v}_{\mu}$. Daher gilt unabhängig von i

$$\sum_{\mu} \operatorname{erfc} \left(\frac{Q_i - v_i^{(\mu)}}{U} \right) = \sum_{\mu} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} - \tilde{v}_{\mu}}{U} \right) = \sum_{\mu} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_{\mu}}{U} \right) = \sum_{\mu} \operatorname{erfc} \left(\frac{v_i^{(\mu)} - Q_{i-1}}{U} \right). \quad (6.34)$$

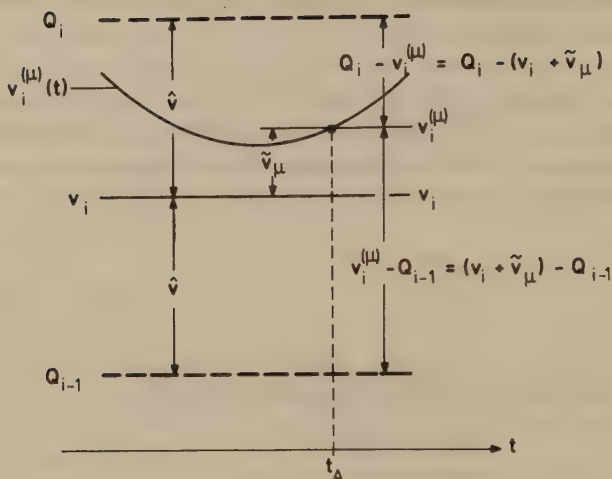


Bild 6.2: Zur Erläuterung einiger bei der Berechnung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit verwendeter Hilfsgrößen

So ergibt sich aus Gl.(6.30) unter Beachtung von Gl.(6.34) für $i=1, \dots, Z-2$

$$\tilde{\Psi}_i^{(ML)} = \tilde{\Psi}^{(ML)} = p_v \cdot \sum_{\mu} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} - \tilde{v}_\mu}{U} \right) = p_v \cdot \sum_{\mu} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_\mu}{U} \right) \quad (6.35)$$

$$i = 1, \dots, Z-2$$

Bei der Angabe der Grenzen für i in Gl.(6.35) wurde berücksichtigt, daß $\tilde{\Psi}_i^{(ML)}$ nur für diejenigen $Z-2$ Wertebereiche nach Gl.(6.35) berechnet werden kann, die von je zwei benachbarten Schwellen endlicher Größe eingeschlossen werden. Für die beiden äußersten Bereiche zwischen den Schwellen Q_{Z-2} und $Q_{Z-1} = +\infty$ bzw. $Q_{-1} = -\infty$ und Q_0 muß die Berechnung gesondert erfolgen. Für den obersten Bereich

liefert Gl.(6.17)

$$\begin{aligned}\Psi_{Z-1,\mu}^{(ML)}(\Phi, Q_{Z-1}, t_A) &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Q_{Z-1} - v_{Z-1}^{(\mu)}}{U} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{v_{Z-1}^{(\mu)} - Q_{Z-2}}{U} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{v_{Z-1}^{(\mu)} - Q_{Z-2}}{U} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_\mu}{U} \right).\end{aligned}\tag{6.36}$$

Diese Beziehung gilt wegen der Symmetrie des Augendiagrammes zur Zeitachse auch für den untersten Wertebereich zwischen den Schwellen Q_{-1} und Q_0 , d. h.

$$\Psi_{Z-1,\mu}^{(ML)}(\Phi, Q_{Z-1}, t_A) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_\mu}{U} \right) = \Psi_{0,\mu}^{(ML)}(\Phi, Q_0, t_A) \tag{6.37}$$

Durch Summation über μ erhält man aus Gl.(6.37)

$$\tilde{\Psi}_{Z-1}^{(ML)} = \tilde{\Psi}_0^{(ML)} = \frac{1}{2} p_v \sum_{\mu} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_\mu}{U} \right) = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\Psi}^{(ML)} \tag{6.38}$$

Zur Berechnung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\Psi}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A)$ für den Fall, daß die Komponenten des Vektors $\underline{Q}$ durch Gl.(6.29) festgelegt sind, müssen nun sowohl die Beiträge der $Z-2$ "inneren" Wertebereiche gemäß Gl.(6.35) als auch die Beiträge der beiden "äußeren" Bereiche gemäß Gl.(6.38) herangezogen werden. Es ergibt sich

$$\bar{\Psi}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = (Z-2) \cdot \tilde{\Psi}^{(ML)} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \tilde{\Psi}^{(ML)} \right) = (Z-1) \cdot \tilde{\Psi}^{(ML)} \tag{6.39}$$

Wenn die Rechteckantwort $h_{iK}(t)$ Gl.(6.23) erfüllt, wird

$$\bar{\Psi}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = \frac{Z-1}{Z^{K+1}} \cdot \sum_{\mu=0}^{Z^K-1} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_\mu}{U} \right) \tag{6.40}$$

Berücksichtigt man schließlich noch die Beziehungen $Z=2^k$ und $U=\sqrt{2N_E}$, so erhält man für die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei redundanzfreier Mehrstufencodierung

$$\bar{\Psi}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = \frac{2^k - 1}{2^{k(K+1)}} \cdot \sum_{\mu=0}^{2^{K-1}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_{\mu}}{\sqrt{2N_E}} \right) \quad (6.41)$$

Aus Gl.(6.41) ergibt sich mit $k=1$ die Beziehung für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit beim Binär-bipolar-Code:

$$\bar{\Psi}_I(\Phi, t_A) = \frac{1}{2^{K+1}} \cdot \sum_{\mu=0}^{2^K-1} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{v} + \tilde{v}_{\mu}}{U} \right) = \frac{1}{2^{K+1}} \cdot \sum_{\mu=0}^{2^K-1} \operatorname{erfc} \left(\frac{v_1^{(\mu)}(t_A)}{\sqrt{2N_E}} \right) \quad (6.42)$$

Der Vektor $\underline{Q}$ ist im Argument von $\bar{\Psi}_I$ überflüssig, da hier die einzige endliche Schwelle $Q_0=0$ ist.

Bei der Berechnung der worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit Ψ_{wc} wird angenommen, daß das Augendiagramm nur aus den inneren Augenrändern besteht. Formal kann man Ψ_{wc} z. B. aus $\bar{\Psi}$ erhalten, indem man

$$\hat{v} + \tilde{v}_{\mu} = v_i^{(i)} - Q_{i-1} = \alpha_{0,i-1}(t_A) - Q_{i-1} \quad \begin{matrix} i \text{ beliebig} \\ \in \{1, \dots, Z-1\} \end{matrix} \quad (6.43)$$

setzt (vgl. Abschnitt 4.4.3.6) Man erhält dann aus Gl.(6.41)

$$\begin{aligned} \Psi_{wc}^{(ML)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) &= \frac{2^k - 1}{2^{k(K+1)}} \cdot 2^{k \cdot K} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_{0,i-1}(t_A) - Q_{i-1}}{U} \right) \\ &= \frac{2^k - 1}{2^k} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_{0,i-1}(t_A) - Q_{i-1}}{\sqrt{2N_E}} \right) \\ &\quad i \text{ beliebig} \quad \in \{1, \dots, Z-1\} \end{aligned} \quad (6.44)$$

und speziell für binär-bipolare Codierung ($k=1, i=1, Q_{i-1}=Q_0=0$)

$$\boxed{\Psi_{I,wc}(\Phi, t_A) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_{00}(t_A)}{\sqrt{2N_E}} \right)} \quad (6.45)$$

6.2.1.2. Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei Partial-Response Codierung

Bei PR-Codierung gibt es i.a. mehrere Niveaus, die einer "+1" bzw. "-1" des binären Datenstromes $x_1(t)$ zuzuordnen sind. Da ferner bei realem Übertragungskanal dem Niveau L_i der Wertebereich zwischen den Schwellen Q_i und Q_{i+1} zugeordnet wird, bedeutet dies, daß jedem dieser Bereiche entweder eine "+1" oder eine "-1" entspricht. Analog zu dem in Gl. (3.28) für binär unipolare Daten formulierten Zusammenhang gilt

$$L_i \hat{=} \begin{cases} -1 & \text{wenn } i \text{ gerade} \\ +1 & \text{wenn } i \text{ ungerade} \end{cases} \quad (6.46)$$

In Bild 6.3 sind die Verhältnisse für einen fünfstufigen PR-Code dargestellt. Signalwerte aus den schraffierten Bereichen werden im Entscheider der +1, Werte aus den nicht-schraffierten Bereichen der -1 zugeordnet. Ein Fehler tritt nur auf, wenn ein Signalwert, der ohne zusätzliche Störung in einem schraffierten Bereich gelegen hätte, infolge der Störung durch Rauschen in einen nicht-schraffierten Bereich fällt oder umgekehrt. Berücksichtigt man diese Tatsache, so erhält man für die Fehlerwahrscheinlichkeit bezüglich eines Signalwertes $v_i^{(\mu)}$

$$\Psi_{i,\mu}^{(PR)}(\Phi, Q_i, t_A) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda_{\max}} \int_{Q_{i+2\lambda} v_i^{(\mu)}}^{Q_{i+2\lambda+1} v_i^{(\mu)}} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi + \sum_{\rho=0}^{\rho_{\max}} \int_{v_i^{(\mu)} - Q_{i-2\rho-1}}^{v_i^{(\mu)} - Q_{i-2\rho-2}} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi \quad (6.47)$$

mit $\lambda_{\max} = \text{entier} \left(\frac{Z-i-2}{2} \right)$ und $\rho_{\max} = \text{entier} \left(\frac{i-1}{2} \right)$

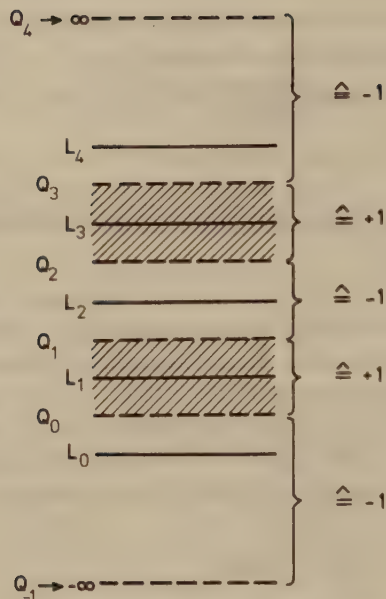


Bild 6.3: Zur Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit bei partial-response-Codierung

Dabei beschreibt analog zu Gl.(6.17) der erste Summand die Fehlerwahrscheinlichkeit durch positive, der zweite die Fehlerwahrscheinlichkeit durch negative Augenblickswerte des Rauschens. In der Praxis wird im allgemeinen der Störabstand so groß sein, daß nur die Verfälschung eines Signalwertes $v_i^{(\mu)}$ in die den benachbarten Niveaus L_{i-1} und L_{i+1} zuzuordnenden Wertebereiche eine Rolle spielt. Dann ist $\lambda_{\max} = \rho_{\max} = 0$ und $\psi_{i,\mu}^{(PR)}$ ist durch die einfachere Beziehung

$$\psi_{i,\mu}^{(PR)}(\Phi, Q_i, t_A) \Big|_{\Phi \rightarrow \infty} = \int_{Q_i - v_i^{(\mu)}}^{Q_{i+1} - v_i^{(\mu)}} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi + \int_{v_i^{(\mu)} - Q_{i-1}}^{v_i^{(\mu)} - Q_{i-2}} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi \quad (6.48)$$

gegeben.

Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\Psi}^{(PR)}(\Phi, \underline{Q}, t_A)$ ergibt sich entsprechend Gl.(6.18) aus

$$\bar{\Psi}^{(PR)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{\mu} p_{v_i^{(\mu)}} \cdot \Psi_{i,\mu}^{(PR)}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = \hat{p}_v \cdot \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{\mu} \Psi_{i,\mu}^{(PR)}(\Phi, \underline{Q}, t_A). \quad (6.49)$$

Die Schreibweise $\hat{p}_v \cdot \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{\mu} \dots$ ist als Abkürzung für $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{K+1}} \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{\mu=0}^{M(i,K)} \dots$ zu verstehen. Dabei wurde berücksichtigt, daß die Werte $v_i^{(\mu)}$ hier durch Gl.(4.18) gegeben sind, jeder Koeffizient $b_{i,\lambda}^{(\mu)}$ nur die beiden Werte ± 1 annehmen kann und daß die Anzahl $M(i,K)$ der dem i -ten Niveau zuzuordnenden Signalwerte im Gegensatz zur ML-Codierung außer von K auch vom Niveau abhängt.

Wie auch hier die Symmetrien innerhalb des Augendiagramms und die Symmetrie der Verteilungsdichte der Momentanwerte des Rauschens die Anwendung der Gl.(6.49) im konkreten Fall vereinfachen, wird im folgenden für die Codes II-IV gezeigt. Bei allen drei Codes ist $Z=3$ und der Abstand benachbarter Niveaus gleichgroß (bei idealem Übertragungskanal: $D_L = L_2 - L_1 = L_1 - L_0 = 2$). Es wird vorausgesetzt, daß die Schwellen symmetrisch zu Null liegen.

$$Q_0 = -Q_1 \quad \text{und} \quad -Q_{-1} = Q_2 \rightarrow \infty \quad (6.50)$$

Die Größen $\lambda_{\max}$ und $\rho_{\max}$ sind in Abhängigkeit von i der Tabelle 6.1 zu entnehmen.

i	$\lambda_{\max} = \text{entier} \left(\frac{1-i}{2} \right)$	$\rho_{\max} = \text{entier} \left(\frac{i-1}{2} \right)$
0	0	-1
1	0	0
2	-1	0

Tabelle 6.1: $\lambda_{\max}$ und $\rho_{\max}$ für $Z=3$

Zunächst werden die $\Psi_{i,\mu}^{(II-IV)}(\Phi, Q_i, t_A)$ gemäß Gl. (6.47) berechnet. Man erhält

$$\text{für } i=0: \Psi_{0,\mu}^{(II-IV)}(\Phi, Q_0, t_A) = \int_{Q_0 - v_0^{(\mu)}}^{Q_1 - v_0^{(\mu)}} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_1 - v_0^{(\mu)}}{U} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{Q_0 - v_0^{(\mu)}}{U} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \text{für } i=1: \Psi_{1,\mu}^{(II-IV)}(\Phi, Q_1, t_A) &= \int_{Q_1 - v_1^{(\mu)}}^{Q_2 - v_1^{(\mu)}} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi + \int_{v_1^{(\mu)} - Q_0}^{v_1^{(\mu)} - Q_1} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi \\ &= \int_{Q_1 - v_1^{(\mu)}}^{\infty} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi + \int_{v_1^{(\mu)} - Q_0}^{\infty} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi \quad (6.51) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_1 - v_1^{(\mu)}}{U} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{Q_1 - v_1^{(\mu)}}{U} \right) \right],$$

$$\text{für } i=2: \Psi_{2,\mu}^{(II-IV)}(\Phi, Q_2, t_A) = \int_{v_2^{(\mu)} - Q_1}^{v_2^{(\mu)} - Q_0} p_{\bar{n}}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{v_2^{(\mu)} - Q_1}{U} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{v_2^{(\mu)} - Q_0}{U} \right) \right].$$

Für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\Psi}^{(II,III,IV)}$ bei den Codes II, III und IV ergibt sich zunächst aus Gl. (6.49)

$$\bar{\Psi}^{(II-IV)}(\Phi, Q, t_A) = \hat{p}_v \cdot \left(\sum_{\mu} \Psi_{0,\mu}^{(II-IV)}(\Phi, Q_0, t_A) + \sum_{\mu} \Psi_{1,\mu}^{(II-IV)}(\Phi, Q_1, t_A) + \sum_{\mu} \Psi_{2,\mu}^{(II-IV)}(\Phi, Q_2, t_A) \right). \quad (6.52)$$

Nutzt man die Symmetrie des Augendiagramms zur Zeitachse aus und beachtet, daß von den insgesamt 2^{K+1} Kombinationen 2^K zum Niveau L_1 sowie je 2^{K-1} zu den Niveaus L_0 und L_2 führen, so folgt mit Gl. (6.51) aus Gl. (6.52)

$$\Psi_{(II,III,IV)}(\Phi, Q_1, t_A) = \frac{1}{2^{K+1}} \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{2^K-1} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_1 - v_1^{(\mu)}}{\sqrt{2N_E}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{Q_1 + v_1^{(\mu)}}{\sqrt{2N_E}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{\mu=0}^{2^{K-1}-1} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{v_2^{(\mu)} - Q_1}{\sqrt{2N_E}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{v_2^{(\mu)} + Q_1}{\sqrt{2N_E}} \right) \right] \right) \quad (6.53)$$

Die worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit $\Psi_{(II,III,IV),wc}$ für die Codes II, III und IV berechnet sich aus Gl.(6.53) unter der Annahme, das Augendiagramm bestünde nur aus den inneren Augenrändern (vgl. Bild 4.4). Ferner genügt es aus Symmetriegründen, z. B. nur das im Bereich positiver Signalwerte liegende Auge zu betrachten. Dann können im Abtastzeitpunkt genau folgende Werte $v_i^{(\mu)}(t_A)$ auftreten:

- 1) Der zum Niveau $L_1=0$ gehörige Wert
 $\max_{\mu} (v_1^{(\mu)}(t_A)) = \alpha_{u,1}(t_A)$ und
- 2) der zum Niveau $L_2=2$ gehörige Wert
 $\min_{\mu} (v_2^{(\mu)}(t_A)) = \alpha_{o,1}(t_A)$.

Bestimmt man für diese Werte des Signals die Fehlerwahrscheinlichkeit aus Gl.(6.53), so erhält man

$$\Psi_{(II,III,IV),wc}(\Phi, Q_1, t_A) = \frac{1}{4} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_1 - \alpha_{u,1}(t_A)}{\sqrt{2N_E}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{Q_1 + \alpha_{u,1}(t_A)}{\sqrt{2N_E}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_{o,1}(t_A) - Q_1}{\sqrt{2N_E}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_{o,1}(t_A) + Q_1}{\sqrt{2N_E}} \right) \right] \quad (6.54)$$

6.2.2. Berechnung mit Hilfe der Momente der Verteilung der Signalwerte im Abtastzeitpunkt

Die Bestimmung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\Psi}$ nach der in den vorangegangenen Abschnitten behandelten direkten Methode ist nur dann mit vernünftigem Rechenaufwand durchführbar, wenn die Impulsantworten $h(t)$ bzw. $h_{iK}(t)$ betragsmäßig genügend rasch abklingen. So sollte bei den Codes I-IV $K \lesssim 10$ gewählt werden können, um einen ausreichend zuverlässigen Wert für $\bar{\Psi}$ zu erhalten (vgl. Gl.(6.23)); bei mehrstufigen Codes führt auch dieser Richtwert für K bereits zu so großen Werten für Z^K , daß eine Berechnung von $\bar{\Psi}$ nach diesem Verfahren nicht mehr sinnvoll erscheint. Daher wurden in den vergangenen fünf Jahren von verschiedenen Autoren Verfahren entwickelt, die eine Bestimmung von $\bar{\Psi}$ mit erheblich geringerem Rechenaufwand über die Verteilung der Signalwerte $v_i^{(\mu)}(t_A)$ im Abtastzeitpunkt gestatten. In einem Fall ([19]) wurden dabei bis zu $K=60$ Abtastwerte der Impulsantwort berücksichtigt! Eine abschließende Wertung der in den Publikationen [17]-[20] angegebenen Verfahren ist noch nicht möglich, da jedes der Verfahren sowohl Vor- als auch Nachteile aufweist. Hierzu sei auf die in [19] und [20] an konkreten Beispielen durchgeführten Vergleiche verwiesen. Im folgenden soll vor allem das Prinzip der Momentenmethode zur Berechnung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit dargestellt werden. Dabei wird im wesentlichen der in [17] eingeschlagene Weg verfolgt.

Wir gehen aus von der Zerlegung des Signalwertes $v_i^{(\mu)}(t_A)$ in einen niveaubestimmenden Anteil $v_{i,\mu}(t_A)$ und einen nichtniveaubestimmenden, von der Nummer i des Niveaus unabhängigen Anteil $\tilde{v}_\mu(t_A)$ gemäß Gl.(4.19). Wir betrachten zunächst eine bestimmte niveaubestimmende Kombination $\langle b_{i,\lambda}^{(\hat{\mu})} \rangle \in A_i$ (vgl. Gl.(4.18)) und berechnen für den zugehörigen Wert $v_{i,\hat{\mu}}$ die Fehlerwahrscheinlichkeit $\psi_{i,\hat{\mu}}$ die

sich bei Mittelung über alle möglichen $\tilde{v}_\mu$ ergibt. Dabei wird die Mittelung durch Integration über die Verteilungsdichte von $\tilde{v}_\mu$ durchgeführt.

Da alle weiteren Betrachtungen für den Abtastzeitpunkt t_A erfolgen, wird wie in Abschnitt 6.2.1 der Hinweis auf t_A durch Angabe des Arguments "...(t_A)" im folgenden weggelassen.

Es sei

$$v_i^{(\mu)} + \tilde{n} = v_{i,\mu} + \tilde{v}_\mu + \tilde{n} \stackrel{\text{Def.}}{=} v_{i,\mu} + w \quad (6.55)$$

wobei zur Abkürzung

$$\tilde{v}_\mu + \tilde{n} \stackrel{\text{Def.}}{=} w \quad (6.56)$$

gesetzt wurde.

Ein Fehler tritt auf, wenn entweder

$$v_{i,\hat{\mu}} + w > Q_i \quad \text{bzw.} \quad w > Q_i - v_{i,\hat{\mu}} \quad (6.57)$$

oder

$$v_{i,\hat{\mu}} + w < Q_{i-1} \quad \text{bzw.} \quad w < Q_{i-1} - v_{i,\hat{\mu}} \quad (6.58)$$

ist.⁵⁾

Mit den Gln.(6.57) und (6.58) ergibt sich für die Fehlerwahrscheinlichkeit $\psi_{i,\hat{\mu}}$

$$\psi_{i,\hat{\mu}}(\Phi, Q, t_A) = \int_{Q_i - v_{i,\hat{\mu}}}^{\infty} p_w(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{Q_{i-1} - v_{i,\hat{\mu}}} p_w(\xi) d\xi \quad (6.59)$$

5) Für PR-Codes gelten die Gln.(6.57) und (6.58) nur unter der Voraussetzung eines genügend großen Störabstandes (vgl. die Bemerkungen zu den Gln.(6.47) und (6.48)).

Bei ML-Codierung gilt Gl.(6.59) exakt, bei PR-Codierung näherungsweise für genügend großen Störabstand $\Phi^{6)}$.

Die Verteilungsdichte von w ergibt sich aus der Faltung der Verteilungsdichten von $\tilde{v}_\mu$ und $\tilde{n}$:

$$p_w(\xi) = p_{\tilde{v}_\mu}(\xi) * p_{\tilde{n}}(\xi) \quad (6.60)$$

Durch Einsetzen von Gl.(6.60) in Gl.(6.59) erhält man mit den Abkürzungen

$$Q_i - v_{i,\hat{\mu}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \xi_u \quad \text{und} \quad Q_{i-1} - v_{i,\hat{\mu}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \xi_0 \quad (6.61)$$

für den ersten Summanden in Gl.(6.59)

$$\begin{aligned} \int_{\xi_u}^{\infty} p_w(\xi) d\xi &= \int_{\xi_u}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\xi) * p_{\tilde{n}}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\xi_u}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot p_{\tilde{n}}(\xi - \eta) d\eta \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{\xi_u}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot p_{\tilde{n}}(\xi - \eta) d\xi \right] d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \left[\int_{\xi_u}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\xi - \eta) d\xi \right] d\eta \end{aligned} \quad (6.62)$$

6) Für PR-Codes würde genauer eine der Gl.(6.47) entsprechende Beziehung gelten. Auch hier soll jedoch wieder ein ausreichend großer Störabstand vorausgesetzt werden, sodaß erstens anstelle von Gl.(6.47) die Gl.(6.48) verwendet werden kann und zweitens auch durch die Verschiebung der Integrationsgrenzen nach ∞ kein allzu großer Fehler begangen wird.

und für den zweiten Summanden

$$\int_{-\infty}^{\xi_0} p_w(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \left[\int_{-\infty}^{\xi_0} p_{\tilde{n}}(\xi - \eta) d\xi \right] d\eta. \quad (6.63)$$

Setzt man die Gln.(6.62) und (6.63) in Gl.(6.59) ein und definiert noch $\xi - \eta \stackrel{\text{Def.}}{=} \zeta$, so folgt weiter

$$\begin{aligned} \psi_{i, \hat{\mu}} &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \left(\int_{\xi_u - \eta}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\zeta) d\zeta \right) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \left(\int_{-\infty}^{\xi_0 - \eta} p_{\tilde{n}}(\zeta) d\zeta \right) d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \left[\int_{\xi_u - \eta}^{\infty} p_{\tilde{n}}(\zeta) d\zeta + \int_{-\infty}^{\xi_0 - \eta} p_{\tilde{n}}(\zeta) d\zeta \right] d\eta \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_u - \eta}{\sqrt{2N_E}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_0 - \eta}{\sqrt{2N_E}} \right) \right] d\eta$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot \tilde{\chi}(\Phi, Q_i, t_A, v_{i, \hat{\mu}}, \tilde{v}_\mu) d\eta,$$

wobei unter Berücksichtigung von Gl.(6.61)

$$\frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{Q_i - v_{i, \hat{\mu}} - \eta}{\sqrt{2N_E}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{v_{i, \hat{\mu}} - Q_{i-1} + \eta}{\sqrt{2N_E}} \right) \right] \stackrel{\text{Def.}}{=} \tilde{\chi}(\Phi, Q_i, t_A, v_{i, \hat{\mu}}, \tilde{v}_\mu) \quad (6.65)$$

gesetzt wurde.

Die zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten Verfahren befassen sich mit Methoden zur näherungsweisen Bestimmung von $\psi_{i, \hat{\mu}}$; sie unterscheiden sich in ihrem Konvergenzverhalten und sind in [20] miteinander verglichen. Bei allen Verfahren spielen die Momente der Verteilungsdichte $p_{\tilde{v}_\mu}(\xi)$ des nicht-niveaubestimmenden Anteils $\tilde{v}_\mu$ des Signalwertes $v_i^{(\mu)}$

eine wesentliche Rolle. Eines dieser Verfahren, das auf [17] zurückgeht, soll kurz skizziert werden.

Gl.(6.64) läßt sich so interpretieren: $\Psi_{i,\hat{\mu}}$ stellt bei konstantem Φ, Q_i, t_A und $v_{i,\hat{\mu}}$ den Erwartungswert von $\tilde{\Lambda}(\dots)$ hinsichtlich aller möglichen $\tilde{v}_\mu$ dar. Wir betrachten nun $\tilde{\Lambda}(\dots)$ für festes Φ, Q_i, t_A und $v_{i,\hat{\mu}}$, schreiben

$$\tilde{\Lambda}(\Phi, Q_i, t_A, v_{i,\hat{\mu}}, \tilde{v}_\mu) \stackrel{\text{Def.}}{=} \Lambda(\tilde{v}_\mu) \quad (6.66)$$

und entwickeln $\Lambda(\tilde{v}_\mu)$ in eine Taylorreihe um $\tilde{v}_\mu = 0$:

$$\Lambda(\tilde{v}_\mu) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{(v)}(0)}{v!} \tilde{v}_\mu^v \quad (6.67)$$

Damit erhalten wir aus Gl.(6.64)

$$\begin{aligned} \Psi_{i,\hat{\mu}} &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{(v)}(0)}{v!} \cdot \tilde{v}_\mu^v d\eta \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{(v)}(0)}{v!} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot \tilde{v}_\mu^v d\eta \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{(v)}(0)}{v!} \cdot m_v(\tilde{v}_\mu) \end{aligned} \quad (6.68)$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot \tilde{v}_\mu^v d\eta \stackrel{\text{Def.}}{=} E\{\tilde{v}_\mu^v\} \stackrel{\text{Def.}}{=} m_v(\tilde{v}_\mu).$$

$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\tilde{v}_\mu}(\eta) \cdot \tilde{v}_\mu^v d\eta$ stellt den Erwartungswert von $\tilde{v}_\mu^v$ bzw. das v -te Moment der Verteilungsdichte $p_{\tilde{v}_\mu}(\xi)$ dar. $p_{\tilde{v}_\mu}(\xi)$ ist symmetrisch zu Null; daher verschwinden alle ungeraden Momente und wir können mit Gl.(6.68) schreiben

$$\Psi_{i,\hat{\mu}} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{(2v)}(0)}{(2v)!} \cdot m_{2v}(\tilde{v}_\mu) \quad (6.69)$$

Sowohl die Ableitungen $\Lambda^{(2v)}(0)$ als auch die Momente $\mu_{2v}(\tilde{v}_\mu)$ lassen sich rekursiv berechnen.

Da $\Lambda(\tilde{v}_\mu)$ eine Summe von erfc -Funktionen ist (Gln.(6.65) und (6.66)), genügt es, $\frac{d^{2v}}{dx^{2v}}(\text{erfc}(x))$ zu kennen. Für die Ableitungen der komplementären Fehlerfunktion gibt es aber eine Rekursionsformel, die die Hermiteschen Polynome $\mathcal{H}_n(x)$ verwendet. Es gilt

$$\frac{d^{2v}}{dx^{2v}}(\text{erfc}(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^v \cdot e^{-x^2} \cdot \mathcal{H}_{2v-1}(\sqrt{2} \cdot x) \quad (6.70)$$

mit den Hermiteschen Polynomen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= 1 \\ \mathcal{H}_1(x) &= x \\ \mathcal{H}_v(x) &= x \cdot \mathcal{H}_{v-1}(x) - (v-1) \cdot \mathcal{H}_{v-2}(x) \end{aligned} \quad (6.71)$$

Wir berechnen nun die Momente der Verteilung $p_{\tilde{v}_\mu}(\eta)$ des nicht niveaubestimmenden Anteils $\tilde{v}_\mu$. Nach Gl.(4.18) und Gl.(4.19) ist

$$\tilde{v}_\mu = \sum_{\lambda \in \langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \notin A_i} b_{i,\lambda}^{(\mu)} \cdot h_\lambda(t_A) \quad (6.72)$$

wobei die Summe i. a. unendlich viele Glieder hat. Wir nehmen an, daß $\tilde{v}_\mu$ nur von $\tilde{K}$ ($\tilde{K}$ endlich) Abtastwerten von $h(t)$ wesentlich beeinflusst wird, numerieren diese durch ($\rho=1, \dots, \tilde{K}$) und schreiben zur Abkürzung

$$\tilde{v}_\mu \approx (\tilde{v}_\mu)_{\tilde{K}} = \sum_{\rho=1}^{\tilde{K}} b_{i,\rho}^{(\mu)} \cdot h_\rho \quad (6.73)$$

Dabei wurde der Hinweis auf den Abtastzeitpunkt t_A wieder weggelassen. Dann gilt

$$(\tilde{v}_\mu)_{\tilde{K}} = \sum_{\rho=1}^{\tilde{K}-1} b_{i,\rho}^{(\mu)} \cdot h_\rho + b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)} \cdot h_{\tilde{K}} \quad (6.74)$$

und es wird

$$\begin{aligned} E \{ \tilde{v}_{\mu}^{\kappa} \} &\approx E \{ (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}}^{\kappa} \} = E \left\{ \left[(\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}-1} + b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)} \cdot h_{\tilde{K}} \right]^{\kappa} \right\} \\ (6.75) \\ &= E \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{\lambda} \cdot (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}-1}^{\lambda} \cdot (b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)} \cdot h_{\tilde{K}})^{\kappa-\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten $b_{i,\lambda}^{(\mu)}$ voneinander statistisch unabhängig sind, gilt das auch für $(\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}-1}$ und $b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)} \cdot h_{\tilde{K}}$ und man erhält aus Gl.(6.75)

$$E \{ (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}}^{\kappa} \} = \sum_{\lambda=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{\lambda} \cdot E \{ (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}-1}^{\lambda} \} \cdot E \{ (b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)} \cdot h_{\tilde{K}})^{\kappa-\lambda} \}. \quad (6.76)$$

Die Momente $E \{ (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}}^{\kappa} \}$ lassen sich also rekursiv aus den Momenten $E \{ (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}-1}^{\lambda} \}$ ($\lambda=0, \dots, \kappa$) und den Momenten von $b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)} \cdot h_{\tilde{K}}$ bestimmen.

Die Koeffizienten $b_{i,\lambda}^{(\mu)}$ nehmen mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte +1 und -1 an. Daher verschwinden alle Momente ungerader Ordnung von $\tilde{v}_{\mu}$ und es gilt

$$E \{ (b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)} \cdot h_{\tilde{K}})^{\kappa-\lambda} \} = E \{ (b_{i,\tilde{K}}^{(\mu)})^{\kappa-\lambda} \} \cdot h_{\tilde{K}}^{\kappa-\lambda} = \begin{cases} 0 & \kappa-\lambda & \text{ungerade} \\ h_{\tilde{K}}^{\kappa-\lambda} & \kappa-\lambda & \text{gerade} \end{cases} \quad (6.77)$$

Somit ergibt sich aus Gl.(6.76) für die gesuchten Momente

$$\mathcal{M}_{2\nu}(\tilde{v}_{\mu}) = E \{ \tilde{v}_{\mu}^{2\nu} \} \approx E \{ (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}}^{2\nu} \} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{2\lambda} \cdot E \{ (\tilde{v}_{\mu})_{\tilde{K}-1}^{2\lambda} \} \cdot h_{\tilde{K}}^{2(\nu-\lambda)}. \quad (6.78)$$

Mit Hilfe der Momente $\mathcal{M}_{2\nu}(\tilde{v}_{\mu})$ und der Ableitungen $\Lambda_{(0)}^{(2\nu)}$ (Gln.(6.70),(6.71)) kann nun aus Gl.(6.69) der Beitrag $\Psi_{i,\hat{\mu}}$ zur Gesamt-Fehlerwahrscheinlichkeit berechnet werden. Es wird nun noch angegeben, wie man die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\Psi}$ erhält. Es gebe M_i Kombinationen $\langle b_{i,\lambda}^{(\mu)} \rangle \in \Lambda_i(\mu=1, \dots, M_i)$ die zum i-ten Niveau führen; jede

dieser Kombinationen tritt mit der Wahrscheinlichkeit M_i^{-1} auf. Die Mittelung über alle zum i-ten Niveau führenden Kombinationen liefert eine Fehlerwahrscheinlichkeit

$$\tilde{\Psi}_i = \frac{1}{M_i} \cdot \sum_{\hat{\mu}=1}^{M_i} \Psi_{i,\hat{\mu}} \quad (6.79)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Signalwert aus dem zum i-ten Niveau gehörenden Bereich stammt, ist $M_i / \sum_{i=0}^{Z-1} M_i$. Da es insgesamt 2^{n-1} niveaubestimmende Kombinationen gibt (vgl. Abschnitt 4.2), ist $\sum_{i=0}^{Z-1} M_i = 2^{n-1}$. Für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich somit

$$\bar{\Psi}(\Phi, \underline{Q}, t_A) = \sum_{i=0}^{Z-1} \frac{M_i}{\sum_{i=0}^{Z-1} M_i} \cdot \tilde{\Psi}_i = 2^{1-n} \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{\hat{\mu}=1}^{M_i} \Psi_{i,\hat{\mu}} \quad (6.80)$$

Einige Bemerkungen zur praktischen Anwendung von Gl.(6.80) sollen die durchgeführten Berechnungen ergänzen. Die Anzahl $\tilde{K}$ von Abtastwerten der Impulsantwort $h(t)$ zur Bestimmung des nicht niveaubestimmenden Anteils $\tilde{v}_{\mu}(t_A)$ (Gl.(6.73)) sollte so groß gewählt werden, daß $|h(t)|$ für $t > \tilde{K} \cdot f$ kleiner als ca. 1‰ bleibt. Die Zahl der zu berücksichtigenden Momente der Verteilung $p_{\tilde{v}_{\mu}}(\xi)$ (Gl.(6.69)) wird am besten durch Versuche bestimmt, da $p_{\tilde{v}_{\mu}}$ in verschiedenen Anwendungsfällen sehr unterschiedlich sein kann.

6.3. Berechnung der optimalen theoretischen Fehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Störabstand am Empfängereingang für die ausgewählten Codes

6.3.1. Allgemeine Bemerkungen und Voraussetzungen

Man kann zeigen, daß die in den Abschnitten 6.3.2 und 6.3.3 berechnete im günstigsten Fall erreichbare Fehlerwahrscheinlichkeit Ψ_{opt} unabhängig von der Übertragungsrate $\dot{U}$ ist. Der Einfachheit halber werden die Berechnungen für die Nyquist-rate $\dot{U}_N$ durchgeführt.

Ferner wird eine Aufteilung des Frequenzganges des Gesamtübertragungssystems auf Sende- und Empfangsfilter zugrundegelegt, die bei gegebener Signalleistung S am Empfängereingang das Signal-/Rauschleistungsverhältnis in den Abtastzeitpunkten am Entscheidereingang maximiert (vgl. z.B. [13], S.51-54). In der Praxis wird als Einzelzeichen gewöhnlich $g^{(r)}(t)$ verwendet; dies ist im Betragsgang des Sendefilters zu berücksichtigen. Die Ableitungen in den beiden folgenden Abschnitten erfolgen dagegen für aus Dirac-Impulsen zusammengesetzte Einzelzeichen $g(t)$ und nicht modifizierte Sendefilter. Auf die Ergebnisse hat das keinen Einfluß.

Bei den PR-Codes wird Ψ_{opt} sowohl für die Realisierung 1 als auch für die Realisierung 2 der Codierung berechnet.

6.3.2. Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei Realisierung 1

Bild 6.4 zeigt ein vereinfachtes Blockschaltbild des den Berechnungen zugrundeliegenden Systems.

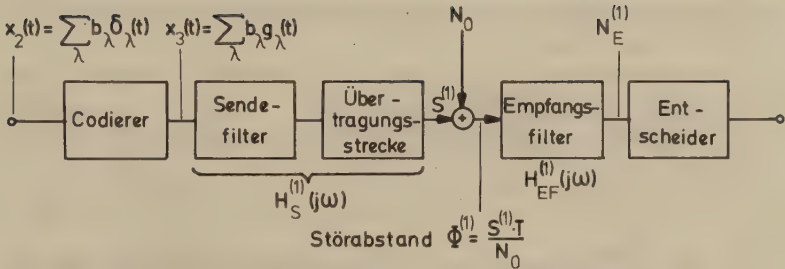


Bild 6.4: Zur Berechnung der optimalen Fehlerwahrscheinlichkeit bei Realisierung 1

Um bei $\ddot{U} = \ddot{U}_N$ am Entscheidereingang den Augenfehler $\Delta\alpha=0$ zu erhalten, muß die Übertragungsfunktion des aus Sendefilter, Übertragungsstrecke und Empfangsfilter bestehenden Übertragungskanals gleich der des "idealen" Tiefpasses gemäß Gl.(3.7) gewählt werden:

$$H_S^{(1)}(j\omega) \cdot H_{EF}^{(1)}(j\omega) = H^{(0)}(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega T} & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.81)$$

Die bei weißem Gaußschen Rauschen als Störer optimale Aufteilung des Betragsganges ist die folgende:

$$|H_S^{(1)}(j\omega)| = |H_{EF}^{(1)}(j\omega)| = \sqrt{|H^{(0)}(j\omega)|} = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.82)$$

Die mittlere Signalleistung $S^{(1)}$ berechnet sich gemäß Abschnitt 5.2 aus der Beziehung

$$S^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x_3}(\omega) \cdot |H_S^{(1)}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} W_{x_3}(\omega) d\omega, \quad (6.83)$$

wobei hier für $W_{x_3}(\omega)$ die spektrale Leistungsdichte des Signals $x_3(t)$ für den Fall einzusetzen ist, daß als PR-Einzelzeichen $g(t)$ nach Gl.(3.14) verwendet wird.

$W_{x_3}(\omega)$ ergibt sich aus der in Abschnitt 5.1.2 für $g^{(r)}(t)$ als Einzelzeichen bestimmten spektralen Leistungsdichte $W_{x_3}^{(r)}(\omega)$ wie folgt:

$$W_{x_3}(\omega) = \frac{W_{x_3}^{(r)}(\omega)}{\left| \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2} \quad (6.84)$$

Die mittlere Störleistung $N_E^{(1)}$ ist gemäß Abschnitt 5.4

$$N_E^{(1)} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}^{(1)}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\omega_N = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = \frac{N_0}{2} \quad (6.85)$$

In die Beziehungen, aus denen sich die Fehlerwahrscheinlichkeit berechnen läßt, geht stets die Größe $\sqrt{2N_E^{(1)}}$ ein (Gl.(6.13)). Als Funktion des Störabstandes $\Phi^{(1)}$ ergibt sie sich mit Hilfe von Gl.(5.39) und Gl.(6.85) zu

$$\sqrt{2 \cdot N_E^{(1)}} = \sqrt{\frac{S^{(1)}}{\Phi^{(1)}}} \quad (6.86)$$

Wie schon erwähnt, werden im Falle $\Delta\alpha=0$ mittlere und worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit gleich. Die Fehlerwahrscheinlichkeit kann daher für den Code I nach Gl.(6.45) und für die drei PR-Codes nach Gl.(6.54) berechnet werden. Die erforderlichen Angaben über das Auge entnimmt man für den Code I dem Bild 4.8, für den Code II dem Bild 4.7, für den Code III dem Bild 4.6 und für den Code IV dem Bild 4.5. Der optimale Abtastzeitpunkt ist in allen Fällen

$$t_A = t_{\text{opt}} = 0 \quad (6.87)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.2 zusammengefaßt und in Bild 6.6 zusammen mit den Kurven für die Realisierung 2 dargestellt.⁷⁾ Die in der letzten Spalte der Tabelle

7)

Bei den drei PR-Codes wurde in Gl.(6.54) der Summand $\text{erfc}\left(\frac{\alpha_0(t) + Q_1}{\sqrt{2N_E}}\right)$ gegenüber den drei restlichen Summanden vernachlässigt.

aufgeführte Beziehung für die Fehlerwahrscheinlichkeit wird für den Duobinärcode auch in [9] und [12] angegeben.

Code	$S^{(1)}$	$\frac{1}{\sqrt{2N_E^{(1)}}}$	Schwelle	Auge	$W_{\text{opt}}^{(1)}(\Phi^{(1)}, Q, t_{\text{opt}})$
I Binär - Bipolar	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} d\omega = 1$	$\sqrt{\Phi^{(1)}}$	$Q_0 = 0$	$\alpha_{0,0}(t_{\text{opt}}) = 1$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\Phi^{(1)}})$
II Duobinär	$\frac{2T}{\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) d\omega = 2$	$\sqrt{\Phi^{(1)}/2}$	$Q_1 = 1$	$\alpha_{0,1}(t_{\text{opt}}) = 2$ $\alpha_{1,1}(t_{\text{opt}}) = 0$	$\frac{3}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\Phi^{(1)}/2})$
III Pseudo- ternär	$\frac{2T}{\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) d\omega = 2$				
IV PR KI.4 n=3	$\frac{2T}{\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \sin^2(\omega T) d\omega = 2$				

Tabelle 6.2: Optimale Fehlerwahrscheinlichkeit für die Codes I-IV bei Realisierung 1

6.3.3. Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei Realisierung 2

In Bild 6.5 ist ein Blockschaltbild des Übertragungssystems angegeben, wie es den folgenden Berechnungen zugrundeliegt.

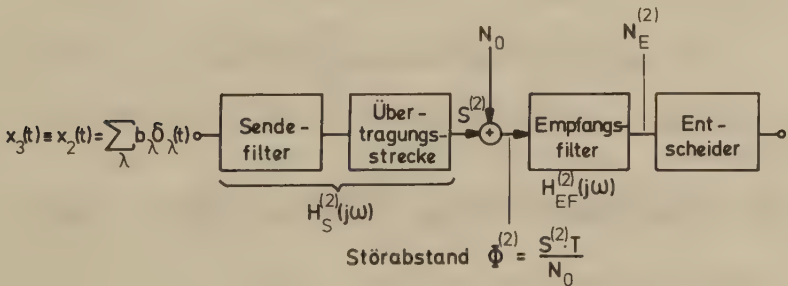


Bild 6.5: Zur Berechnung der optimalen Fehlerwahrscheinlichkeit bei Realisierung 2

Der aus Sendefilter, Übertragungsstrecke und Empfangsfilter zusammengesetzte Übertragungskanal hat für $\bar{u}, \bar{u}_N$ die Übertragungsfunktion $H^{(N)}(j\omega)$ gemäß den Gln. (3.7), (3.10), (3.15) und (3.16):

$$H_S^{(2)}(j\omega) \cdot H_{EF}^{(2)}(j\omega) = H^{(N)}(j\omega) = \begin{cases} \sum_{v=0}^{N-1} d_v e^{-j\omega(\tau+v \cdot T)} & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.88)$$

Auch hier ist es wieder am günstigsten, den Frequenzgang $H^{(N)}(j\omega)$ hinsichtlich des Betrages gleichmäßig auf Sende- und Empfangsseite aufzuteilen:

$$|H_S^{(2)}(j\omega)| = |H_{EF}^{(2)}(j\omega)| = \sqrt{|H^{(N)}(j\omega)|} \quad (6.89)$$

Bei der Berechnung der mittleren Signalleistung $S^{(2)}$ ist zu beachten, daß das Signal $x_3(t)$ am Eingang des Sendefilters für alle PR-Codes eine binär-bipolare Folge von Dirac-Impulsen ist, deren spektrale Leistungsdichte $W_{x_3}(\omega)$ durch

$$W_{x_3}(\omega) = W_I(\omega) = \frac{W_I^{(r)}(\omega)}{\left| \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2} = T \quad (6.90)$$

gegeben ist (vgl. Gl. (5.21)). Für $S^{(2)}$ erhält man damit analog zu Gl. (6.83)

$$S^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_I(\omega) \cdot |H_S^{(2)}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |H^{(N)}(j\omega)| d\omega \quad (6.91)$$

Die mittlere Störleistung $N_E^{(2)}$ ist mit den Gln. (6.89) und (6.91)

$$N_E^{(2)} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{EF}^{(2)}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |H^{(N)}(j\omega)| d\omega = \frac{S^{(2)} \cdot N_0}{2T} \quad (6.92)$$

Ferner liefern die Gln. (5.39) und (6.92)

$$\sqrt{2N_E^{(2)}} = S^{(2)} / \sqrt{\Phi^{(2)}} \quad (6.93)$$

Da die übrigen Größen, die zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit erforderlich sind ($\alpha_{0,1}(t_{\text{opt}})$, $\alpha_{u,1}(t_{\text{opt}})$, Q_1) dieselben Werte haben wie im Falle der Realisierung 1, ist also lediglich $S^{(2)}$ zu berechnen: Man erhält für den Duobinärcode

$$S_{\text{II}}^{(2)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |1 + e^{-j\omega T}| d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} 2 \cdot \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) d\omega = \frac{4}{\pi} \quad (6.94)$$

für den Pseudoternärcode

$$S_{\text{III}}^{(2)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |1 - e^{-j\omega T}| d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} 2 \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) d\omega = \frac{4}{\pi} \quad (6.95)$$

und für den PR-Code Kl.4, n 3:

$$S_{\text{IV}}^{(2)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |1 - e^{-j2\omega T}| d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} 2 \cdot \sin(\omega T) d\omega = \frac{4}{\pi} \quad (6.96)$$

In allen drei Fällen ergibt sich also mit Gl.(6.93)

$$\sqrt{2 \cdot N_E^{(2)}} = \frac{4}{\pi \sqrt{\Phi^{(2)}}} \quad (6.97)$$

Einsetzen von Gl.(6.97) zusammen mit $\alpha_{0,1}(t_{\text{opt}}) = 2$, $\alpha_{u,1}(t_{\text{opt}}) = 0$ und $Q_1 = 1$ in Gl.(6.54) liefert

$$\Psi_{\text{opt}}^{(2)}(\Phi^{(2)}, Q, t_{\text{opt}}) = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{4}{\pi} \sqrt{\Phi^{(2)}}\right) \quad \cdot \cdot$$

(6.98)

In [13] wird für den Duobinärcode ebenfalls diese Beziehung angegeben.

In Bild 6.6 ist $\Psi_{\text{opt}}^{(2)}$ zusammen mit $\Psi_{\text{opt}}^{(1)}$ in Abhängigkeit vom Störabstand Φ graphisch dargestellt. Man erkennt, daß hinsichtlich der erreichbaren Fehlerwahrscheinlichkeit Realisierung 2 günstiger ist als Realisierung 1. In der

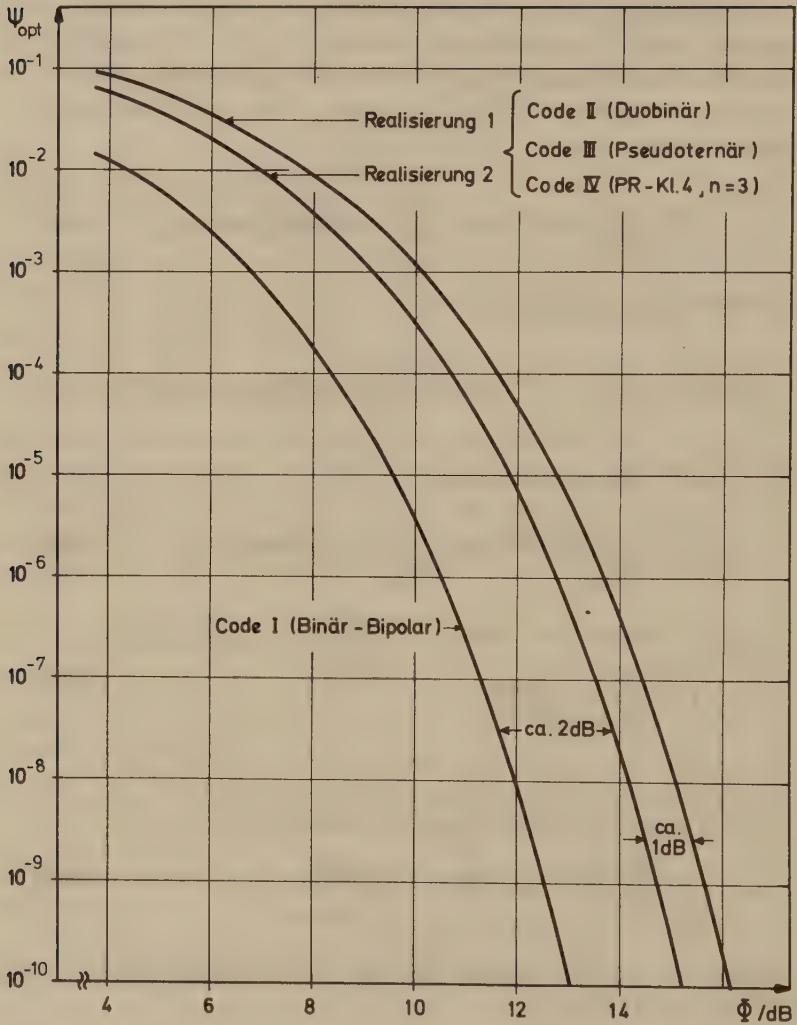


Bild 6.6: Die optimale theoretische Fehlerwahrscheinlichkeit Ψ_{opt} als Funktion des Störabstandes $\Phi \cdot \frac{S \cdot T}{N_0}$ am Empfängereingang

Praxis wird der Unterschied jedoch oft nicht so ausgeprägt sein. Denn die für Realisierung 2 erforderliche Einbeziehung der Codiererübertragungsfunktion in Sende- und Empfangsfilter kann je nach Art der Übertragungsstrecke und vor allem bei höheren Übertragungsraten die Realisierung erschweren, zumindest wenn man an eine Realisierung mittels analoger Filter denkt.

7. Anwendungsbeispiele

7.1. Übersicht und allgemeine Bemerkungen

Anhand von Beispielen wird die Anwendung der in den vorangegangenen Kapiteln abgeleiteten Beziehungen für Auge, Leistungsspektrum und Fehlerwahrscheinlichkeit behandelt. Der Einteilung der Arbeit entsprechend werden zwei Gruppen von Beispielen unterschieden. Im folgenden Abschnitt werden zunächst Übertragungskanäle ohne Berücksichtigung von Fremdstörungen hinsichtlich minimaler Impulsinterferenz optimiert. Abschnitt 7.3 behandelt die simultane Optimierung von Sende- und Empfangsfilter bzgl. minimaler Fehlerwahrscheinlichkeit bei gegebener Übertragungsstrecke.

Für die Durchführung der erforderlichen Berechnungen wurden ALGOL-Programme erstellt, die teils das von Powell [38] angegebene (Abschnitt 7.2), teils ein Variationsverfahren zur Optimierung verwenden. Die Rechnungen erfolgten auf dem Digitalrechner TR 440.

Eine gewisse Schwierigkeit liegt in der kritischen Wertung der Ergebnisse. Zwar wurde in einigen Fällen durch Verwendung mehrerer Näherungen für eine zusätzliche Absicherung gesorgt, dennoch kann nicht dafür garantiert

werden, daß nicht bei gleichem Filteraufwand und unter gleichen Randbedingungen bessere Lösungen existieren. Daher werden die gefundenen Lösungen auch bewußt nicht als optimal sondern lediglich als günstig bezeichnet.

7.2. Minimierung des relativen Augenfehlers

Allen Beispielen dieses Abschnitts gemeinsam ist das Optimierungskriterium $\Delta\alpha \downarrow \text{Min.}$ Zunächst werden Filter für die Realisierung 1 der PR-Codierung entworfen, der Teilabschnitt 7.2.2 bringt anschließend je ein Filter für die Realisierung 2 der Codes II und IV.

Ein wesentlicher Bestandteil des hier beschriebenen Filterentwurfs⁸⁾ -sowohl die Näherungen als auch die eigentliche Augenoptimierung betreffend- ist eine in [39] angegebene Transformation: Während die Pole der Übertragungsfunktion als freie Parameter zur Verfügung stehen, werden die Nullstellen (Dämpfungspole) mit Hilfe der Transformation so bestimmt, daß das Filter von einer gewissen Sperrgrenze ab eine vorgeschriebene Mindestdämpfung im Tschebyscheffschen Sinn einhält. Ursprünglich für eine Approximation von Frequenzgängen gedacht (Gruppenlaufzeit in [39], Dämpfung in [40] und Abschnitt 7.2.1.1), wurde das Verfahren in [23] erstmalig auf die $\Delta\alpha$ -Minimierung beim Code I angewandt.

Für die folgenden Beispiele⁸⁾ wurden Tiefpässe vom Typ 54 (Grad der Übertragungsfunktion 5, 2 endliche Dämpfungspole) mit einer minimalen Sperrdämpfung $a_{\min} = 40 \text{ dB}$ und einem zusätzlichen Allpaß ausgewählt.

⁸⁾ Ausnahme: Der Bandpaß für die Realisierung 2 des Codes IV in Abschnitt 7.2.2.2.

7.2.1. Tiefpässe für Realisierung 1

Es war das Ziel, im Sinne eines geringen Augenfehlers günstige Filter mit der Übertragungsfunktion $H_{\text{ÜK}}^{(R)}(j\omega)$ (vgl. Bild 4.1) für Rechteckerregung und die Übertragungsraten $\ddot{U}=1, 1.25, 1.5$ und $1.75 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$ zu erhalten. Versteht man unter Übertragungsrate den Quotienten aus Bitrate und Sperrgrenze ($\ddot{U} = \frac{1/T}{\omega_g/2\pi}$), so ist dies gleichbedeutend mit der Aufgabe, für die Bitrate $\frac{1}{T}$ Filter mit $\omega_g/\omega_N = T \cdot \omega_g/\pi = 2, 1.6, 1.3\bar{3}$ und $1.14\bar{3}$ zu entwerfen, die einen möglichst kleinen relativen Augenfehler aufweisen.

7.2.1.1. Ausgangsnäherung

Um Näherungen zu erhalten, wurden mit Hilfe des eingangs erwähnten Verfahrens und unter Berücksichtigung der Rechteckerregung für die verschiedenen Übertragungsraten zunächst die Betragsgänge von Filtern mit der Übertragungsfunktion $H_{\text{ÜK}}^{(R)}(j\omega) = H^{(Y)}(j\omega)/R(j\omega)$ und

$$|H_{\text{ÜK}}^{(R)}(j\omega)| = \begin{cases} \frac{|H^{(Y)}(j\omega)|}{\text{si}(\frac{\omega T}{2})} & |\omega| < \omega_N \cdot (1+\gamma) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.1)$$

im quadratischen Mittel approximiert (vgl. auch [15]).

Soll- und Ist-Kurven dieser Approximation sind in der linken Hälfte von Bild 7.1 dargestellt ⁹⁾. Anschließend wurde mit jeweils einem Allpaß ein Laufzeitausgleich durchgeführt ¹⁰⁾; die rechte Hälfte des Bildes zeigt den Frequenzgang der Gruppenlaufzeit der Filter ohne und mit Allpaß.

⁹⁾ Dabei bezieht sich die gewählte Normierung der Ordinatenwerte nur auf den Wunschverlauf.

¹⁰⁾ Sei ω_{MAX} die Frequenz, bei der ohne Allpaß das Maximum der Gruppenlaufzeit auftritt, dann erfolgte die Laufzeitentzerrung im Bereich $0 \leq |\omega| \leq 0.9 \cdot \omega_{\text{MAX}}$.

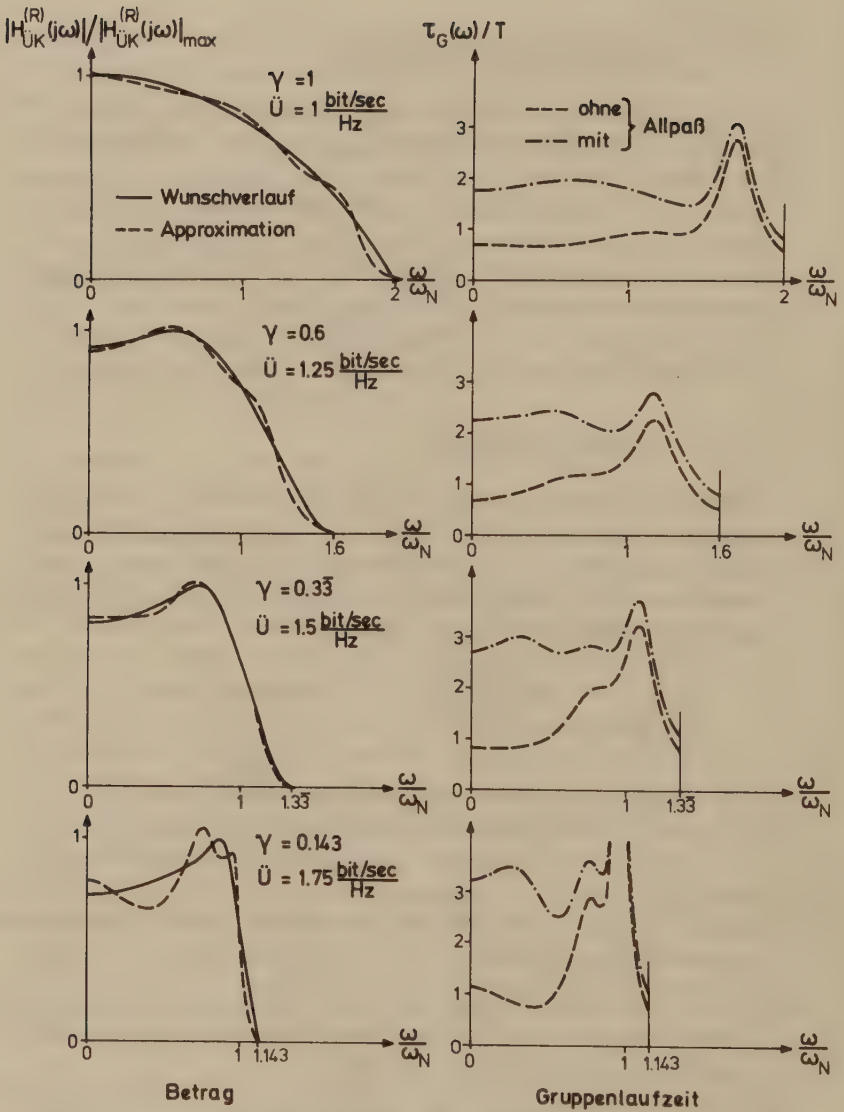


Bild 7.1: Durch Approximation des Wunschverlaufs gemäß Gl.(7.1) gewonnene Näherungen für die $\Delta\alpha$ -Minimierung bei unterschiedlichen Übertragungsraten $\ddot{U}$. Bitrate $1/T = \omega_N/\pi$. Filtertyp 54. + 1 Allpaß vom Grad 2. Sperrgrenze $\omega_g = \omega_N(1+\gamma)$. Minimale Sperrdämpfung $a_{\text{min}} = 40 \text{ db}$

In Tabelle 7.1 sind die Beziehungen zwischen Übertragungsrate, Bandbreite und roll-off-Faktor zusammengefaßt:

$\ddot{U} = \frac{1/T}{\omega_g/2\pi}$	$\frac{\ddot{U}}{\ddot{U}_N}$	$\frac{\omega_g}{\omega_N} = \frac{\omega_g \cdot T}{\pi}$	γ
1.0	0.5	2.0	1.0
1.25	0.625	1.6	0.6
1.5	0.75	1.33	0.33
1.75	0.875	1.143	0.143

Tabelle 7.1: Übertragungsrate, Bandbreite und roll-off-Faktor für die Beispiele des Abschnitts 7.2

7.2.1.2. Bemerkungen zur Optimierung

Die im Anhang 9.2 angegebene Abschätzung wurde dazu verwendet, die Anzahl der Abtastwerte $h(t_A + \lambda \cdot T)$ während der Optimierung so zu variieren, daß die absolute Genauigkeit des Augenfehlers 0.2 % (für $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.5, 0.625$ und 0.75) bzw. 1 % (für $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.875$) betrug. Hierfür waren je nach Code bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.5$ 6 bis 12, bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.625$ 7 bis 13, bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.75$ 11 bis 15 und bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.875$ 30 bis 100 Abtastwerte erforderlich. Der günstigste Abtastzeitpunkt t_A wurde bei jedem Aufruf der Zielfunktion durch Bestimmung des Maximums des vertikalen Augendurchmessers neu festgelegt. Bei dem gewählten Filteraufwand stehen für die Optimierung sieben freie Parameter zur Verfügung: Zwei komplexe Polpaare und ein reeller Pol des Tiefpasses, sowie ein komplexes Polpaar des Allpasses. Da ein Optimierungsverfahren mit quadratischer Konvergenz ([38]) das Optimum nach ebensovielen Iterationen findet, wie die Zahl der freien

Parameter beträgt¹¹⁾, wurde die Optimierung stets nach sieben Iterationen beendet. Anhand des Optimierungsverlaufes (Abnahme des Fehlers mit der Zahl der Iterationen) war jedoch ersichtlich, daß zumindest bei den beiden kleineren Übertragungsraten auch schon vier bis fünf Iterationen ausgereicht hätten. Dies hängt natürlich damit zusammen, daß hier die verwendeten Näherungen schon sehr gut waren (vgl. Bild 7.1). Die Rechenzeiten lagen zwischen 60 sec ($\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.5$) und 600 sec ($\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.875$).

7.2.1.3. Ergebnisse und Diskussion

Die Optimierungsergebnisse sind für jeden Code getrennt in den Bildern 7.2 bis 7.5 dargestellt. Die Pole und Nullstellen finden sich in Tabellenform im Anhang 9.3.

Allgemein ist zunächst folgende Tatsache festzustellen: Aus den Augenformeln für die einzelnen Codes (Gln. (4.88) bis (4.94)) geht hervor, daß ein Übertragungskanal mit sehr kleinem Augenfehler bei Code I auch für die übrigen Codes eine geringe Impulsinterferenz erwarten läßt, da hier die Abtastwerte $h_{\ddot{U}K}(t_A \pm \lambda \cdot T)$ selbst klein sein müssen und nicht lediglich z.B. Summe (Code II) oder Differenz (Code III) aufeinanderfolgender Abtastwerte. Dies kommt in den Ergebnissen unmittelbar zum Ausdruck: Bis zu $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.75$ sind die Lösungen, betrachtet man nur den Augenfehler, für alle Codes etwa gleichwertig. Berücksichtigt man zusätzlich die Abhängigkeit des bei der Optimierung außerachtgebliebenen Schrittfehlers von der Übertragungsrate, so schneiden die Codes III und IV ungünstig, der Code II besonders günstig ab. Allerdings ist zu beachten,

11)

Diese Aussage gilt zwar nur unter gewissen einschränkenden Bedingungen an die Zielfunktion; diese sind aber bei nicht in analytischer Form vorliegenden Zielfunktionen grundsätzlich schwer nachprüfbar.

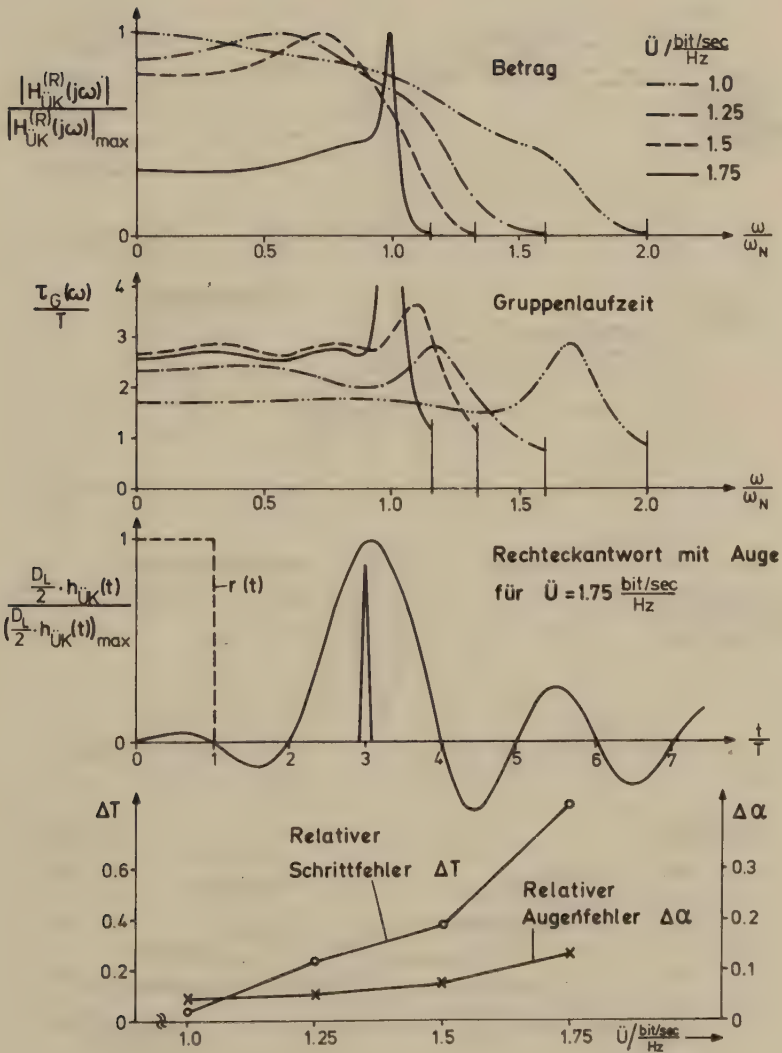


Bild 7.2: Übertragungskanäle für binär-bipolare Übertragung (Code 1) mit unterschiedlichen Übertragungsraten. Filtertyp 54. + Allpaß Grad 2. Minimale Sperrdämpfung 40 dB. Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktionen im Anhang 9.3

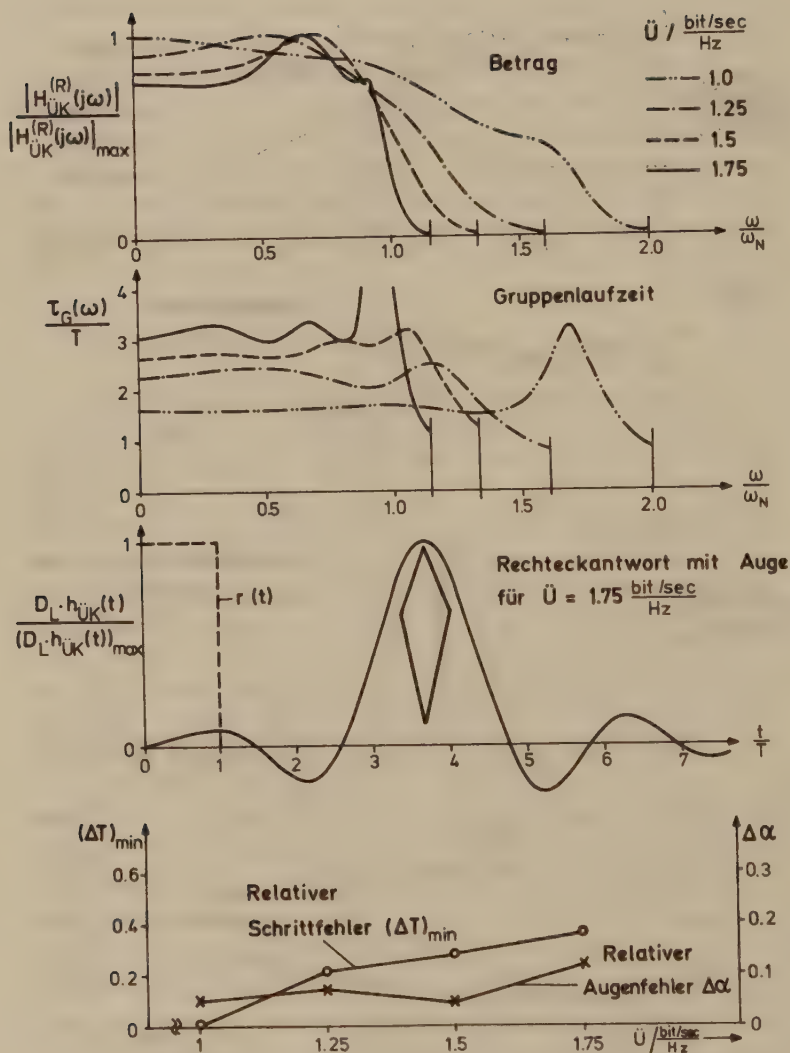


Bild 7.3: Übertragungskanäle für duobinäre Übertragung (Code II) mit unterschiedlichen Übertragungsraten. Realisierung 1. Filtertyp 54. + Allpaß Grad 2. Minimale Sperrdämpfung 40 dB. Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktionen im Anhang 9.3

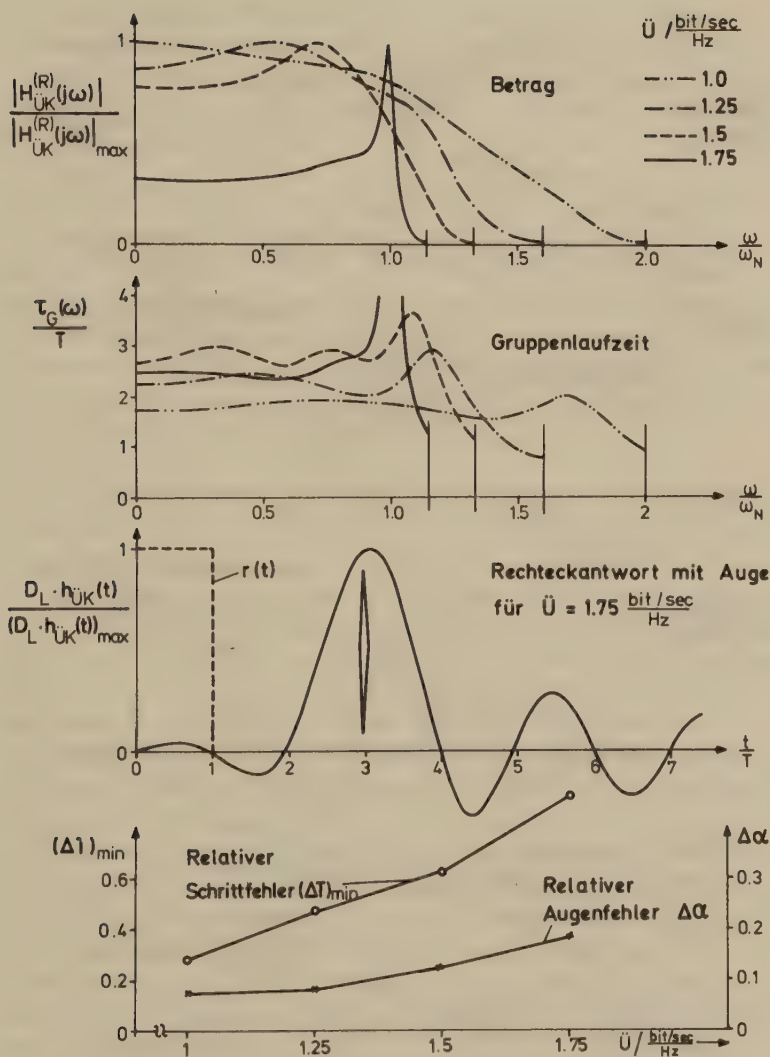


Bild 7.4: Übertragungskanäle für pseudoternäre Übertragung (Code III) mit unterschiedlichen Übertragungsraten. Realisierung 1. Filtertyp 54. + 1 Allpaß Grad 2. Minimale Sperrdämpfung 40 dB. Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktionen im Anhang 9.3

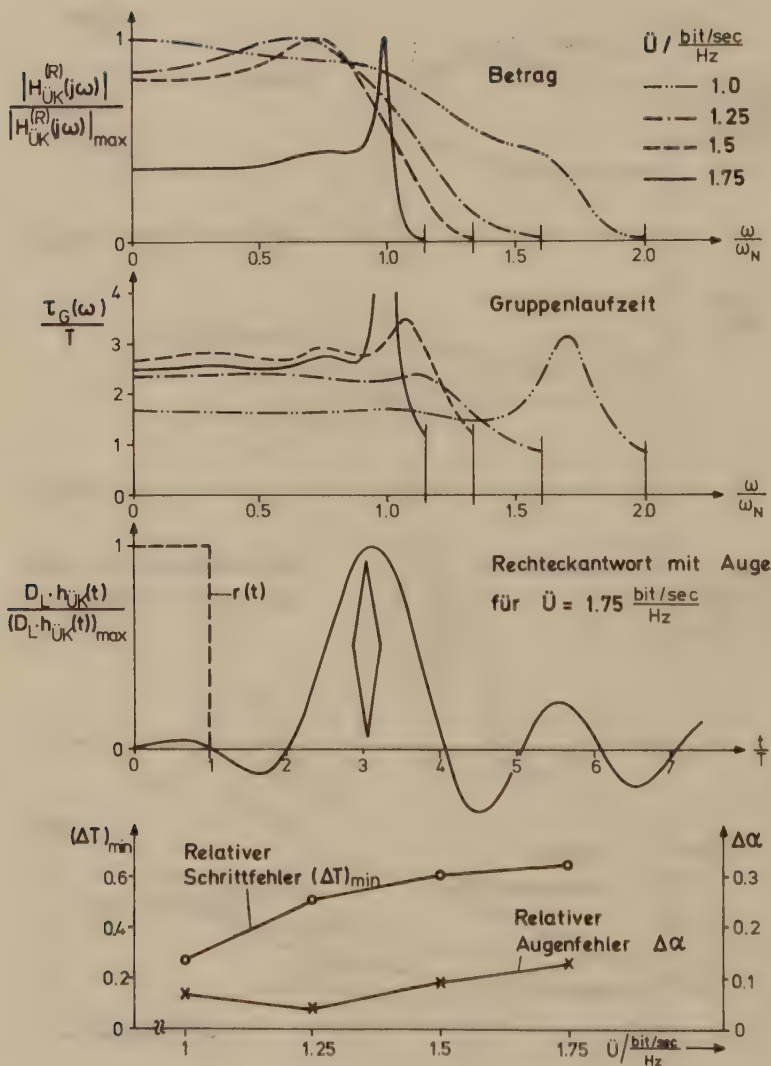


Bild 7.5: Übertragungskanäle für Codierung nach PR K1. 4, n=3 (Code IV) mit unterschiedlichen Übertragungsraten. Realisierung 1. Filtertyp 54. + Allpaß Grad 2. Minimale Sperrdämpfung 40 dB. Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktionen im Anhang 9.3

daß der Schrittfehler beim Code IV auch für $\ddot{U} \rightarrow \ddot{U}_N$ noch $< 100\%$ betragen kann. (Die Kurve $\Delta T(\ddot{U})$ verläuft mit wachsendem $\ddot{U}$ wieder flacher!), während für die Codes I und III bei $\ddot{U} = \ddot{U}_N$ sogar im günstigsten Fall $\Delta T = 1$ wird (vgl. die Bilder 4.5 bis 4.8).

Geht man schließlich zu $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.875$ über, so zeigt sich bei der Betrachtung des Frequenzganges des Betrages ein weiterer Vorteil des Codes II. Während die Betragsgänge der übrigen Codes vor allem bei Berücksichtigung endlicher Spulengüten wegen der ausgeprägten Spitze (verursacht durch einen Pol mit $\zeta_\infty \approx -0.02$) schwierig zu realisieren sind, gilt dies für den Code II in viel geringerem Maße (der Realteil des entsprechenden Poles ist hier $\zeta_\infty \approx -0.05$).

Von grundsätzlichem Interesse bei der behandelten Minimierung der Impulsinterferenz ist die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen es sich lohnt, diese Minimierung für einen bestimmten Code durchzuführen. Natürlich stellt sich die Frage desto weniger, je kleiner die Übertragungsrate ist. Vor allem wenn Allpässe eingesetzt werden können, genügt es, den Augenfehler für den Code I zu minimieren, um damit zugleich eine für die übrigen Codes günstige Lösung zu erhalten. Um die Verhältnisse genauer untersuchen zu können, wurden für die beiden höheren Übertragungsraten die Tabellen 7.2 und 7.3 erstellt. Die zeilenweise Betrachtung dieser Matrizen zeigt, wie stark sich $\Delta\alpha$ ändert, wenn ein für den Code A optimiertes Filter für die Übertragung mit einem Code B eingesetzt wird; die eigentlichen Optimierungsergebnisse stehen dabei in der Hauptdiagonale. Während bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.75$ der Einfluß allgemein geringer ist und sich hauptsächlich die Code II-Lösung als ungünstig für die übrigen Codes erweist, kann er bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.875$ z.T. erheblich werden (Code II-Lösung betrieben mit Code I oder III, Code IV-Lösung betrieben mit Code I oder III).

Betrieben mit Code				
	I	II	III	IV
I	7.4	8.2	13.8	10.2
II	17.5	4.6	34.5	11.0
III	8.8	12.1	13.1	11.5
IV	10.7	6.3	20.4	9.2

Optimiert für Code

Tabelle 7.2: Augenfehler $\Delta\alpha$ in % für $\ddot{U} = 1.5 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\frac{\ddot{U}}{\ddot{U}_N} = 0.75$

Betrieben mit Code				
	I	II	III	IV
I	13.1	12.6	22.4	17.9
II	61.8	11.7	> 100 Augen geschlossen	30.4
III	14.2	14.4	18.3	16.8
IV	26.4	12.4	48.4	13.0

Optimiert für Code

Tabelle 7.3: Augenfehler $\Delta\alpha$ in % für $\ddot{U} = 1.75 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\frac{\ddot{U}}{\ddot{U}_N} = 0.875$

Überraschend ist zunächst, daß sowohl die bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.75$ als auch die bei $\ddot{U}/\ddot{U}_N = 0.875$ für den Code III gefundene Lösung für jeden der anderen Codes eine größere vertikale Augenöffnung liefert als für den Code III selbst. Dies kann jedoch im Rahmen des angewandten Optimierungsverfahrens nicht ausgeschlossen werden. Wesentlich ist nur, daß keine der für die Codes A mit A+B gefundenen Lösungen für den Code B einen kleineren Augenfehler ermöglicht als das speziell für diesen Code erhaltene Optimierungsergebnis, kurz: Der in der Hauptdiagonale stehende Wert muß kleiner sein als die übrigen Werte der gleichen Spalte der Tabelle.

Abschließend werden zwei Gesichtspunkte erwähnt, die bei der Beurteilung der mitgeteilten Ergebnisse berücksichtigt werden sollten.

- 1) Ein wesentlicher Vorteil der Codes III und IV, die Tatsache nämlich, daß nach einem dieser Codes codierte Signale auf Grund des für $\omega \rightarrow 0$ verschwindenden Leistungsspektrums ohne zusätzliche Maßnahmen auch über Bandpaß-Kanäle übertragen werden können, kommt bei dem gewählten Tiefpaß-Übertragungskanal nicht zur Geltung.
- 2) Die Ergebnisse dieses Abschnittes wurden anhand von allpaßhaltigen Filtern gewonnen. Die Verwendung minimalphasiger Filter kann zu -nicht nur quantitativ- abweichenden Lösungen führen. So ist es denkbar, daß manche Codes (z.B. Code I) mehr als andere (z.B. Code III) auf Allpässe "angewiesen" sind.

7.2.2. Filter für Realisierung 2

Für die Codes II und IV wurde je ein Filter zur Übertragung von Daten mit der Nyquist rate optimiert. Näherungen wurden durch die Approximation der schon im Zusammenhang mit der Augenberechnung angegebenen Frequenzgänge des Betrages und nachträgliche Laufzeitentzerrung gewonnen.

7.2.2.1. Tiefpaß für den Duobinär-Code (Code II)

Die Approximation des erforderlichen Betragsganges

$$|H_{II}^{(N,R)}(j\omega)| = \frac{|H_{II}^{(N)}(j\omega)|}{|R(j\omega)|} = \begin{cases} \frac{2 \cdot \cos(\frac{\omega T}{2})}{\text{si}(\frac{\omega T}{2})} & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.2)$$

(vgl. Bild 4.7) erfolgte wie bei den Beispielen in Abschnitt 7.2.1 durch einen Tiefpaß vom Typ 54. mit $\omega_g = \omega_N$ und $a_{\min}$ 40 dB, der Laufzeitausgleich durch einen Allpaß vom Grad 2. Die Lösung, die sich bei der anschließenden Optimierung bzgl. kleinen Augenfehlers ergab, ist zusammen mit der bei linearer Phase idealen Betragskurve (Gl.(7.2)) im oberen Teil von Bild 7.6 dargestellt. Die Parameter der zugehörigen Übertragungsfunktion sind im Anhang 9.3 angegeben.

Der untere Teil des Bildes zeigt die Rechteckantwort und das Auge. Beide können unmittelbar mit den entsprechenden Angaben in Bild 4.7 verglichen werden. Allerdings ist eine kurze Bemerkung zur Amplitudennormierung erforderlich. Da hier nur die Zeitantwort $h_{II}^{(N)}(t)$, nicht aber $h_{ÜK}^{(N)}(t)$ zur Verfügung steht, wurden $h_{II}^{(N)}(t)$ und Auge auf die Amplitude $h_{II}^{(N)}(t_{\max} - T/2)$ normiert. Dabei ist $t_{\max}$ der Zeitpunkt, in dem $h_{II}^{(N)}(t)$ sein Maximum annimmt und $t_{\max} - T/2$ der Zeitpunkt, in dem im Idealfall $h_{ÜK}^{(N)}(t)$ maximal wird.

7.2.2.2. Bandpaß für den PR-Code Kl.4, n 3 (Code IV)

Zunächst wurde der bei Einbeziehung der Rechteckerregung erforderliche Übertragungskanal $H_{IV}^{(N,R)}(j\omega) = H_{IV}^{(N)}(j\omega) / R(j\omega)$ mit

$$|H_{IV}^{(N,R)}(j\omega)| = \frac{|H_{IV}^{(N)}(j\omega)|}{|R(j\omega)|} = \begin{cases} \frac{2 \cdot \sin(\frac{\omega T}{2})}{\text{si}(\frac{\omega T}{2})} & |\omega| < \omega_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.3)$$

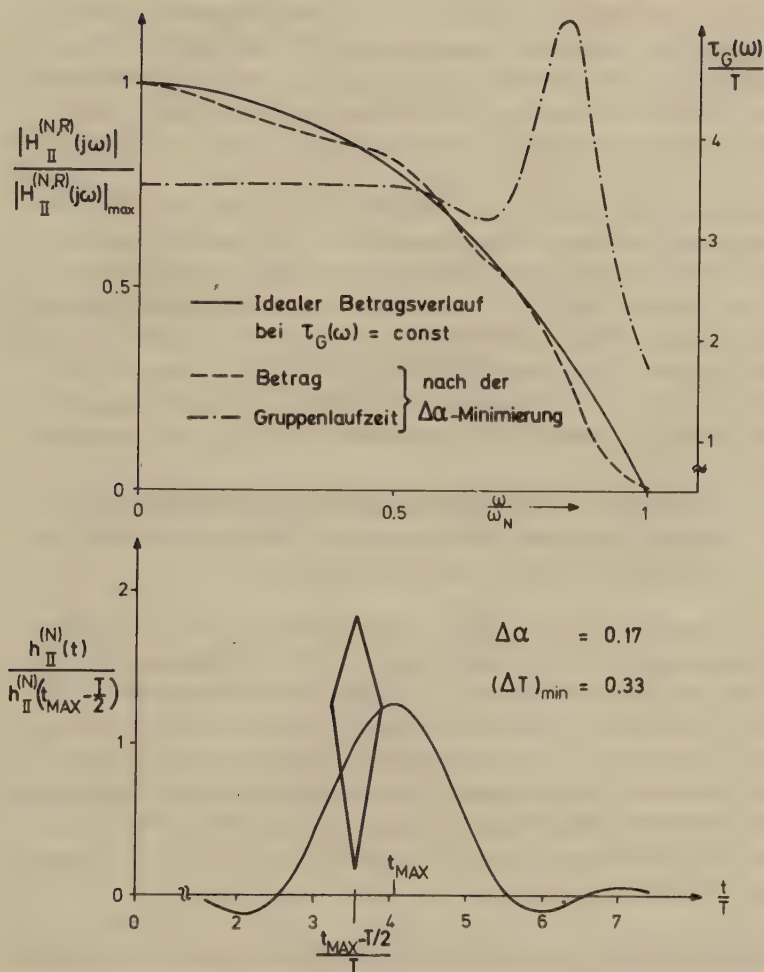


Bild 7.6: Tiefpaß für die duobinäre Übertragung (Code II) von Rechteckzeichenfolgen mit der Nyquist rate ($\ddot{u} = \ddot{u}_N = 2 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$). Realisierung 2. Filtertyp 54. + 1 Allpaß vom Grad 2. Minimale Sperrdämpfung 40 db. Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion im Anhang 9.3

durch einen Bandpaß vom Typ 65. (1 Dämpfungspol bei 0, zwei weitere endliche Dämpfungspole im Bereich $\omega > \omega_N$) approximiert. Von der Sperrgrenze $\omega_g : \omega_N$ ab betrug die minimale Sperrdämpfung $a_{\min} : 30$ dB. Zur Phasenlinearisierung dienten zwei Allpässe vom Grad 2.

Betrags- und Gruppenlaufzeitverlauf nach der $\Delta\alpha$ -Minimierung sind im oberen, Rechteckantwort und Auge im unteren Teil von Bild 7.7 dargestellt. Ähnlich wie in Abschnitt 7.2.2.1 wurde auch hier eine Amplitudennormierung gewählt, die einen direkten Vergleich mit Bild 4.5 erlaubt. Sei t_{NULL} der Zeitpunkt des Nulldurchgangs von $h_{\text{IV}}^{(N)}(t)$, dann tritt im Idealfall das Maximum von $h_{\text{ÜK}}^{(N)}(t)$ im Zeitpunkt $t_{\text{NULL}} - T$ auf. Daher wurden $h_{\text{IV}}^{(N)}(t)$ und Auge auf $h_{\text{IV}}^{(N)}(t_{\text{NULL}} - T)$ normiert.

7.3. Simultane Optimierung von Sende- und Empfangsfilter bezüglich minimaler worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit bei gegebener Übertragungsstrecke

Der Problemstellung dieses Abschnitts lag ein Übertragungssystem gemäß Bild 5.1 zugrunde. Als Bitrate wurde 2.048 Mbit/sec ($T : 0.488 \mu\text{s}$) entsprechend dem PCM-System PCM 30 gewählt, als Übertragungsstrecke dienten 2 km Ortskabel ($0.6 \text{ mm } \phi$). Zunächst wird in Abschnitt 7.3.1 die Bestimmung der Kabelnachbildung sowie geeigneter Näherungen für Sende- und Empfangsfilter behandelt. Abschnitt 7.3.2 geht auf die Optimierung ein und in Abschnitt 7.3.3 werden die Ergebnisse mitgeteilt und kurz diskutiert.

Neben der Einbeziehung des Rauschens als Störer liegt ein entscheidender Unterschied zu der Minimierung des relativen Augenfehlers in Abschnitt 7.2 darin, daß es bei den hier behandelten Beispielen nicht auf die relative Augenöffnung ankommt, sondern auf das Verhältnis der absoluten Größen von Augenhöhe und der Wurzel aus der Störleistung: es

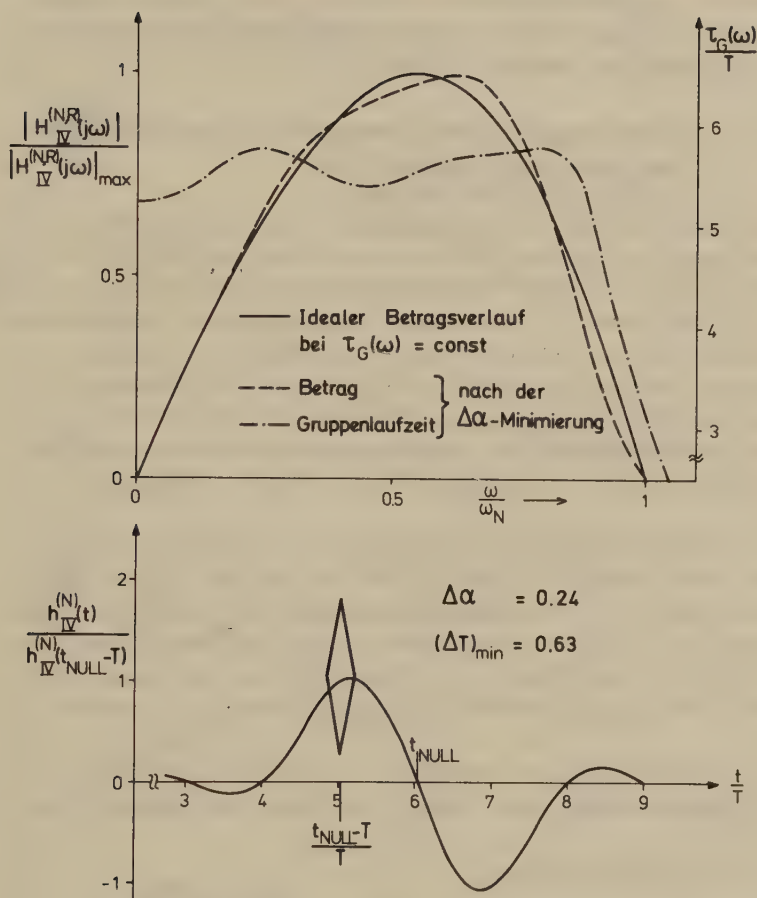


Bild 7.7: Bandpaß für die Übertragung von Rechteckzeichenfolgen nach PR-Klasse 4, $n=3$ (Code IV) mit der Nyquist rate ($\ddot{U} = \ddot{U}_N = 2 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$). Realisierung 2. Filtertyp 65. + 2 Allpässe vom Grad 2. Minimale Sperrdämpfung $a_{\min} = 30$ db. Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion im Anhang 9.3

handelt sich also um eine Maximierung des Signal-/Rauschleistungsverhältnisses im Entscheiderpunkt unter Berücksichtigung der Impulsinterferenz.

7.3.1. Nachbildung der Übertragungsstrecke und Näherungen für Sende- und Empfangsfilter

Die Nachbildung des Ortskabelabschnittes wurde durch Approximation der als Meßkurve vorliegenden Rechteckantwort durch eine Übertragungsfunktion $H_{\text{US}}(s)$ vom Typ 31. (3 reelle Pole, 1 reelle Nullstelle) gewonnen. Messung und Approximation sind im oberen Teil von Bild 7.8 dargestellt. Bei der späteren Optimierung des Übertragungssystems wurde bei den Codes III und IV zusätzlich ein Leitungsübertrager mit einer unteren Grenzfrequenz (3 dB-Grenze) von 10 kHz berücksichtigt: $H_{\text{UT}}(s) = \frac{s}{s + 2\pi \cdot 10^4}$.

Die Entzerrung der Kabeldämpfung im Bereich $0 \leq f \leq 2$ MHz mit Hilfe einer Übertragungsfunktion $H_{\text{SF}}(s) = \frac{s + \sigma_{01}}{s + \sigma_{\infty 1}} \cdot \frac{s + \sigma_{02}}{s + \sigma_{\infty 2}}$, die sich als reflexionsfreie Impedanzschaltung realisieren läßt [41], lieferte eine Näherung für das Sendefilter. Die Güte der Entzerrung hinsichtlich Dämpfung und Gruppenlaufzeit ist aus dem unteren Teil von Bild 7.8 ersichtlich.

Als Näherung für das Empfangsfilter diente ein Butterworth-Tiefpaß vom Grad 3 mit einer 3 dB-Grenze bei $\omega_N = 2\pi \cdot 1.024$ MHz.

7.3.2. Die Optimierung

Ausgehend von den genannten Näherungen wurde bei festgehaltenem Störabstand $\Phi = 10$ dB am Empfängereingang durch Variation der Parameter von Sende- und Empfangsfilter (2 reelle Pole und 2 reelle Nullstellen von SF, 1 reeller Pol und 1 komplexes Polpaar von EF) die worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit Ψ_{WC} (Gln. (6.45) und (6.54)) im Entscheiderpunkt minimiert.

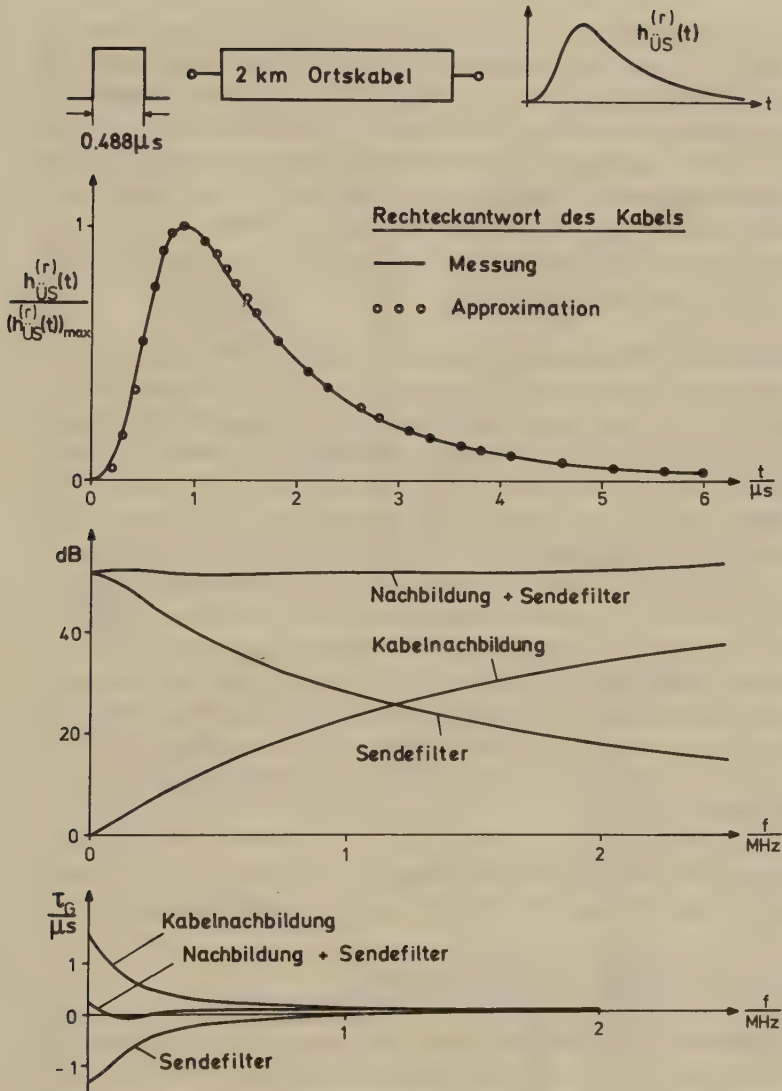


Bild 7.8: Kabelnachbildung durch Approximation der Rechteckantwort und Dämpfungsentzerrer als Näherung für das Sendefilter

Da die in Abschnitt 7.2 verwendete Optimierungsprozedur ([38]) bei der vorliegenden Problemstellung dazu neigte, in der Anfangsphase der Optimierung einzelne Parameter nach unendlich wandern zu lassen, wurde hier ein Variationsverfahren angewandt. Die Verbesserung der Fehlerwahrscheinlichkeit gegenüber der Näherung betrug ca. eine Größenordnung. Die Schwelle Q_1 wurde bei den drei PR-Codes nicht mitvariiert, sie wurde stets in die Mitte zwischen oberen und unteren Augenrand gelegt.

Während der Optimierung wurden bei den Codes I und II so viele Abtastwerte der Impulsantwort $h(t)$ berücksichtigt, daß der vertikale Augendurchmesser gemäß der Abschätzung in Anhang 9.2 stets mit einem Fehler von maximal 1 % behaftet war. In der erhaltenen Lösung reichten hierfür 10 (Code I) bzw. 15 (Code II) Abtastwerte aus. Nach der gleichen Abschätzung wären für den Code III 70 und für den Code IV 90 Werte erforderlich gewesen; die Ursache hierfür ist die infolge des Bandpaß-Kanals langsamer abklingende Impulsantwort. Kontrollrechnungen mit nur 20 Abtastwerten lieferten jedoch bei erheblich geringerem Rechenzeitbedarf Ergebnisse, die sich von den ursprünglich erhaltenen nur geringfügig unterschieden. Die erwähnte Abschätzung ist also für das hier untersuchte Übertragungssystem offenbar zu grob.

Die Rechenzeiten lagen zwischen 70 sec (Code I, 10 Abtastwerte) und 300 sec (Codes III und IV, 20 Abtastwerte).

7.3.3. Ergebnisse und Diskussion

Die Ergebnisse sind für jeden der vier Codes in einem Bild (Bilder 7.9 bis 7.12) dargestellt. Die Bilder zeigen in der linken Hälfte jeweils die Frequenzgänge von Dämpfung und Gruppenlaufzeit für Kabel, Sende- und Empfangsfilter sowie für das aus der Hintereinanderschaltung dieser drei Blöcke

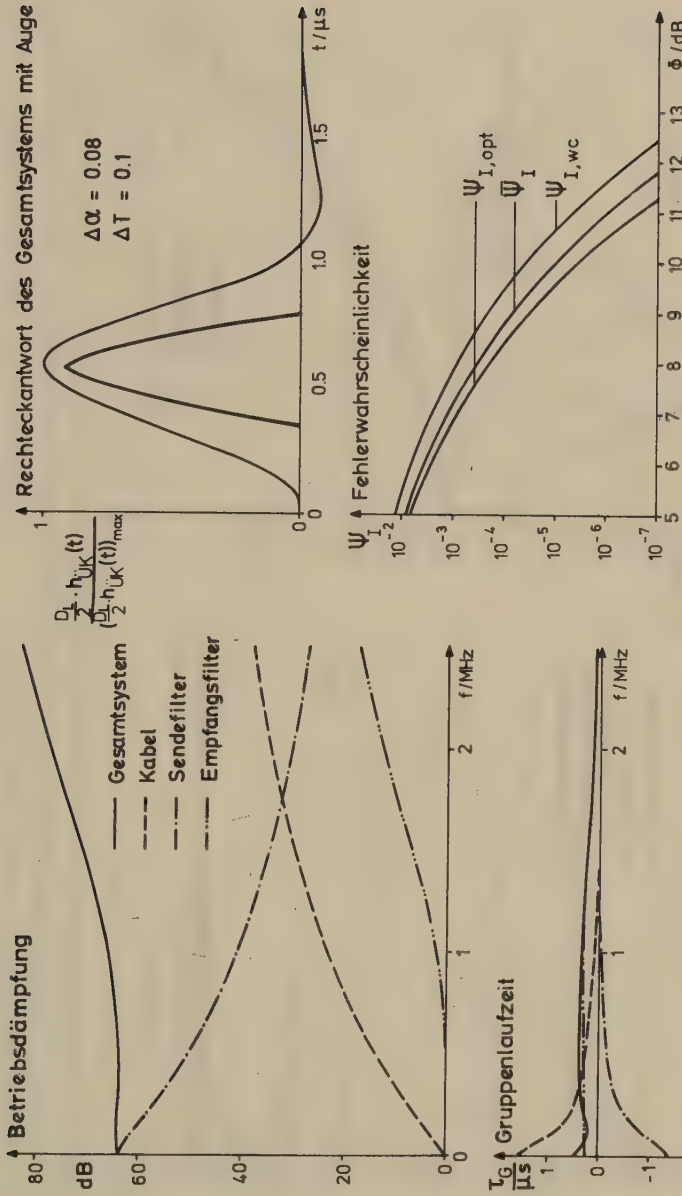


Bild 7.9: Ergebnisse der Minimierung der worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit für die Übertragung binär-bipolar codierter Rechteckzeichenfolgen mit 2,048 Mbit/sec über 2 km Ortskabel (Code I)

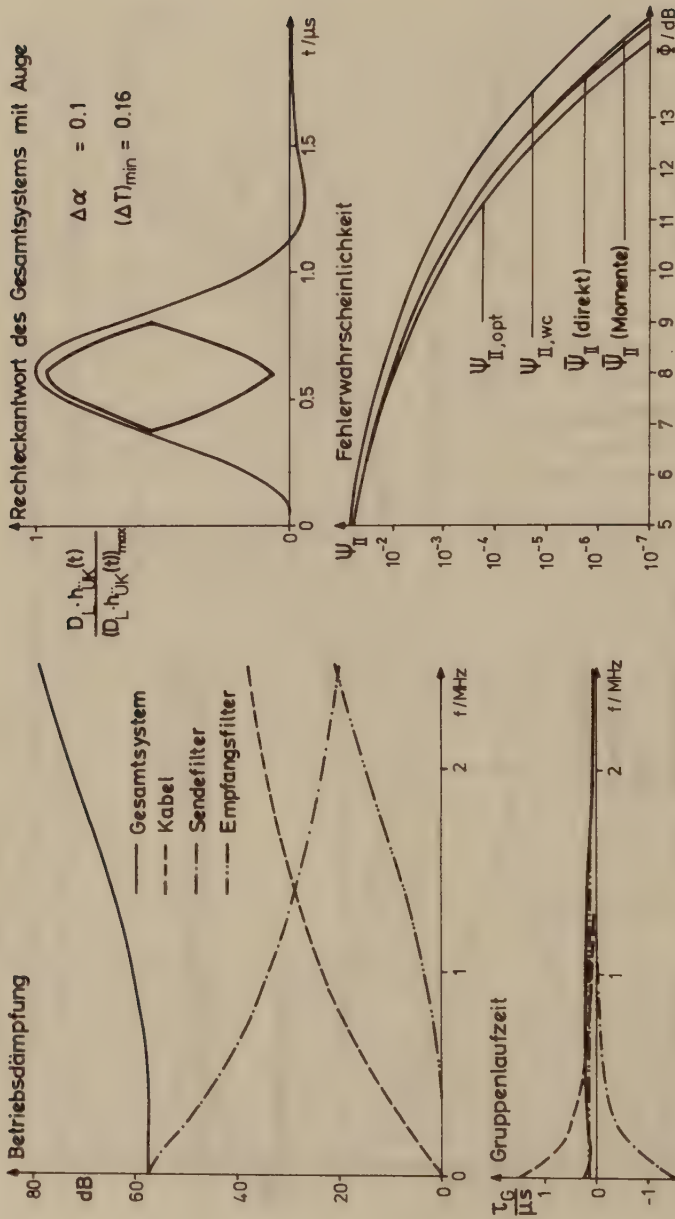
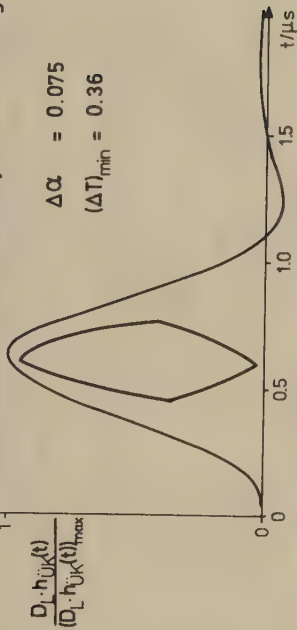


Bild 7.10: Ergebnisse der Minimierung der worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit für die Übertragung duobinär codierter Rechteckzeichenfolgen mit 2.048 Mbit/sec über 2 km Ortskabel (Code II)

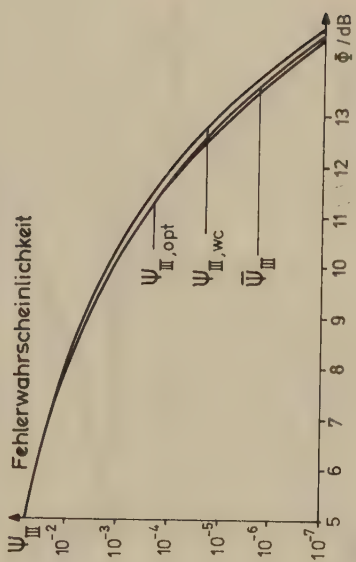
Rechteckantwort des Gesamtsystems mit Auge



$$\Delta Q = 0.075$$

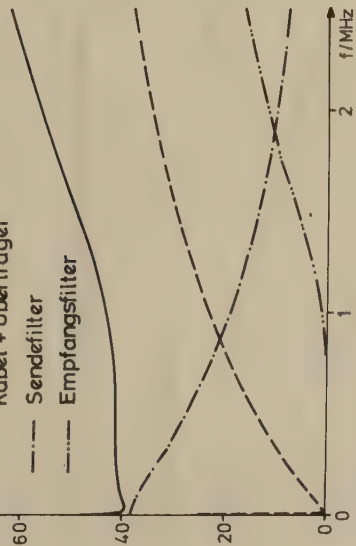
$$(\Delta T)_{\min} = 0.36$$

Fehlerwahrscheinlichkeit



Betriebsdämpfung

- Gesamtsystem
- - - Kabel + Übertrager
- · - · - Sendefilter
- - - Empfangsfilter



Gruppenlaufzeit

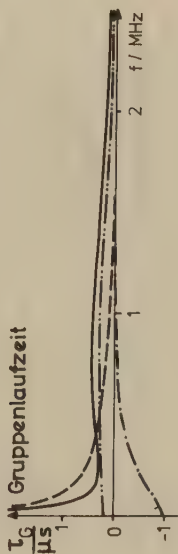


Bild 7.11: Ergebnisse der Minimierung der worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit für die Übertragung pseudoternär-codierter Rechteckzeichenfolgen mit 2.046 Mbit/sec über 2 km Ortskabel (Code III)

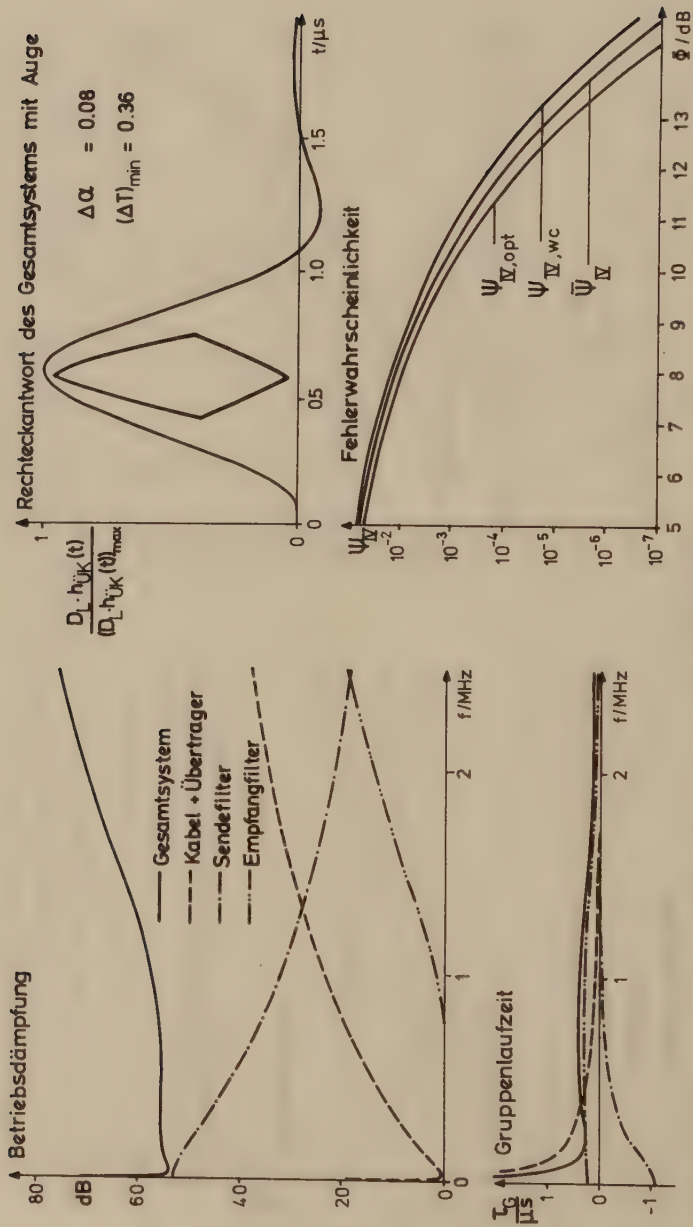


Bild 7.12: Ergebnisse der Minimierung der worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit für die Übertragung nach PR-Klasse 4, n=3 codierter Rechteckzeichenfolgen mit 2.043 Mbit/sec über 2 km Ortskabel (Code IV)

bestehende Gesamtsystem. In der rechten Bildhälfte sind Rechteckantwort mit Auge und ideale (vgl. Bild 6.6), worst-case- und mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Störabstand Φ angegeben. Bei der Berechnung der mittleren Fehlerrate $\bar{\Psi}_{\text{dir.}}$ nach der direkten Methode wurden 10 Abtastwerte von $h(t)$ verwendet, es waren also 2^{10} Amplituden im Abtastzeitpunkt und die zugehörigen Überschreitungswahrscheinlichkeiten zu berechnen. Zur Bestimmung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit $\bar{\Psi}_{\text{Mom.}}$ nach der Momentenmethode genügten -zusätzlich zu der schon im vorangegangenen Abschnitt für die einzelnen Codes angegebenen Zahl von Abtastwerten- drei Momente der Verteilungsdichtefunktion der Amplituden $\tilde{v}_\mu$ ($\mathcal{M}_0(\tilde{v}_\mu)$, $\mathcal{M}_2(\tilde{v}_\mu)$ und $\mathcal{M}_4(\tilde{v}_\mu)$)¹²⁾. Bei den Codes I, III und IV stimmen $\bar{\Psi}_{\text{dir.}}$ und $\bar{\Psi}_{\text{Mom.}}$ bis zu Fehleraten von 10^{-7} im Rahmen der Zeichengenauigkeit überein. Der beim Code II für Fehlerraten $< 10^{-7}$ zunehmende Unterschied zwischen $\bar{\Psi}_{\text{dir.}}$ und $\bar{\Psi}_{\text{Mom.}}$ war bei den anderen Codes für noch kleinere Fehlerraten ebenfalls zu beobachten und durch Berücksichtigung einer größeren Anzahl von Momenten nicht wesentlich zu beeinflussen.

Von Interesse ist auch die für eine einmalige Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit erforderliche Rechenzeit; sie betrug bei den dreistufigen Codes für Ψ_{wc} 0.11 sec, für $\bar{\Psi}_{\text{dir.}}$ 0.85 sec und für $\bar{\Psi}_{\text{Mom.}}$ 0.13 sec. Diese Werte zeigen, daß zumindest für die gewählten Beispiele auch eine Minimierung der mittleren Fehlerrate mit vertretbarem Aufwand an Rechenzeit möglich wäre, wenn $\bar{\Psi}$ nach der Momentenmethode berechnet wird.

Da sich im Rahmen der bei der Optimierung zugrundegelegten Nebenbedingungen ein breitbandiges Gesamtsystem ergab (die

12) Innerhalb des in den Bildern 7.9, ..., 7.12 dargestellten Bereiches änderten sich die Werte für die Fehlerwahrscheinlichkeit beim Übergang auf vier Momente um weniger als 1‰.

40 dB-Grenze bezogen auf den Dämpfungswert bei der Frequenz Null liegt bei 5 MHz!), erhält man zusammen mit der Bitrate von ca. 2 Mbit/sec eine sehr niedrige Übertragungsrate (bezogen auf 5 MHz z.B. $0.4 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$). Daher sind auch keine gravierenden Unterschiede zwischen den für die einzelnen Codes gewonnenen Ergebnissen zu erwarten. Interessant ist immerhin, daß beim Code III die geringste Grunddämpfung in Kauf genommen werden muß (40 dB gegenüber 64 dB beim Code I).

Die gefundenen Lösungen können hinsichtlich der erreichten Fehlerwahrscheinlichkeit unmittelbar mit den in Bild 6.6 angegebenen idealen Kurven verglichen werden. In Anbetracht des geringen Filteraufwandes können sie als günstig gelten.

Pole und Nullstellen der Filterübertragungsfunktionen finden sich im Anhang 9.3.

8. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung von Systemkenngrößen, die bei der Übertragung von Daten mit Hilfe mehrstufiger Codes eine wesentliche Rolle spielen. Im Vordergrund stehen dabei die Partial-Response-Codes ("PR-Codes"), jedoch werden zum Vergleich auch die redundanzfreien Mehrstufencodes ("ML-Codes") in die Betrachtungen einbezogen. Nach Behandlung der grundlegenden Unterschiede zwischen PR- und ML-Codierung werden in Kap. 3 vier häufiger verwendete Codes ausgewählt (Binär-bipolar-, Duobinär-, Pseudoternär- und PR-Code Klasse 4, $n=3$), anhand derer in den folgenden Kapiteln gezeigt wird, welche Form die zunächst allgemein abgeleiteten Ergebnisse im konkreten Fall annehmen.

Um die wichtigste Kenngröße des Datenübertragungssystems, die zu erwartende Bitfehlerrate, als Funktion des Störabstandes am Empfängereingang angeben zu können, müssen das Augendiagramm, die Signalleistung am Empfängereingang und die Störleistung im Entscheiderpunkt bekannt sein. Daher wird zuerst ein einheitliches auf alle betrachteten Codes anwendbares Verfahren entwickelt, das die Bestimmung des Augendiagramms und insbesondere des inneren Augenrandes aus der Impulsantwort des Gesamtsystems ermöglicht. Dieses in Kap. 4 behandelte Verfahren stellt das erste neue Ergebnis der Arbeit dar.

In Kap. 5 wird einerseits die Signalleistung aus der spektralen Leistungsdichte des codierten Signals und andererseits die Störleistung im Entscheiderpunkt berechnet. Es wird gezeigt, wie Signal- und Störleistung geschlossen bestimmt werden können; die analytische Berechnung der Signalleistung (vgl. Anhang 9.1) ist ein weiteres neues Ergebnis der Arbeit.

Zwei bekannte Methoden zur Bestimmung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit werden einander in Kap. 6 gegenübergestellt und die unter gewissen Voraussetzungen idealen Fehlerwahrscheinlichkeitskurven berechnet.

Kap. 7 bringt zwei Gruppen typischer Beispiele für die Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse auf den Entwurf von Datenübertragungssystemen, einmal die Minimierung des relativen Augenfehlers für unterschiedliche Übertragungsraten, zum anderen die Minimierung der worst-case-Fehlerwahrscheinlichkeit bei gegebener Übertragungstrecke durch Variation der Parameter von Sende- und Empfangsfilter. Dabei ermöglichen vor allem die in Kap. 4 abgeleiteten Ergebnisse die Durchführung dieser Optimierungen erstmals auch für Partial-Response-Codes.

9. Anhang

9.1. Die geschlossene Berechnung der mittleren Signalleistung am Empfängereingang

Wir gehen aus von der Beziehung für die spektrale Leistungsdichte $W_{PR}^{(r)}(\omega)$ PR-codierter Signale (Gl.(5.24)). Die mittlere Signalleistung $S_{PR}^{(r)}$ am Ausgang der Übertragungsstrecke ist dann

$$S_{PR}^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{PR}^{(r)}(\omega) \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|^2 \cdot \left| \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot e^{-jv\omega T} \right|^2 \cdot |H_S(j\omega)|^2 d\omega \quad (9.1)$$

mit $H_S(j\omega)$ entsprechend Gl.(5.29).

Wir betrachten nun eine Funktion $F(s)$, die auf der $j\omega$ -Achse mit dem Integranden $W_{PR}^{(r)}(\omega) \cdot |H_S(j\omega)|^2$ übereinstimmt:

$$F(s) = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{s^2} \cdot A(s) \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) \quad (9.2)$$

Dabei wurde zur Abkürzung noch

$$A(s) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{v=0}^{n-1} d_v \cdot e^{-svT} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} d_{\mu} \cdot e^{s\mu T} \quad (9.3)$$

eingeführt. $A(s)$ läßt sich auffassen als Summe der Elemente einer Matrix $(d_v \cdot d_{\mu} \cdot e^{s(\mu-v) \cdot T})$ mit $v, \mu = 0, \dots, n-1$.

Faßt man jeweils alle Matrixelemente einer links bzw. rechts von der Hauptdiagonalen liegenden Nebendiagonalen zusammen, so erhält man

$$A(s) = \sum_{p=0}^{n-1} d_p^2 + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left[\left(e^{-s\lambda T} + e^{s\lambda T} \right) \sum_{\kappa=0}^{n-1-\lambda} d_{\kappa} \cdot d_{\kappa+\lambda} \right]. \quad (9.4)$$

Wir führen weiterhin die Abkürzungen

$$P_{\lambda} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{\kappa=0}^{n-1-\lambda} d_{\kappa} \cdot d_{\kappa+\lambda} \quad (9.5)$$

und

$$\tilde{P}_{\lambda} \stackrel{\text{Def.}}{=} e^{s\lambda T} + e^{-s\lambda T} \quad (9.6)$$

ein. Damit wird

$$F(s) = \frac{1}{T} \cdot \frac{(\tilde{P}_1 - 2)}{s^2} \cdot A(s) \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) \quad (9.7)$$

und wir berechnen nun zunächst den Ausdruck $(\tilde{P}_1 - 2) \cdot A(s)$.

$$\begin{aligned} (\tilde{P}_1 - 2) \cdot A(s) &= (\tilde{P}_1 - 2) \cdot \left(P_0 + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \tilde{P}_{\lambda} \cdot P_{\lambda} \right) \\ &= P_0 (\tilde{P}_1 - 2) + \sum_{\lambda=1}^{n-1} P_{\lambda} (\tilde{P}_{\lambda-1} + \tilde{P}_{\lambda+1} - 2 \cdot \tilde{P}_{\lambda}) \\ &= P_0 (\tilde{P}_1 - 2) + \sum_{\lambda=0}^{n-2} P_{\lambda+1} \cdot \tilde{P}_{\lambda} + \sum_{\lambda=2}^n P_{\lambda-1} \cdot \tilde{P}_{\lambda} - 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{n-1} P_{\lambda} \cdot \tilde{P}_{\lambda} \\ &= -2P_0 + \sum_{\lambda=0}^{n-2} P_{\lambda+1} \cdot \tilde{P}_{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^n P_{\lambda-1} \cdot \tilde{P}_{\lambda} - 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{n-1} P_{\lambda} \cdot \tilde{P}_{\lambda} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Mit $\tilde{P}_0 = 2$ ergibt sich

$$(\tilde{P}_1 - 2) \cdot A(s) = 2(P_1 - P_0) + \sum_{\lambda=1}^{n-2} [(P_{\lambda-1} - 2P_{\lambda} + P_{\lambda+1}) \cdot \tilde{P}_{\lambda}] + (P_{n-2} - 2P_{n-1}) \cdot \tilde{P}_{n-1} + P_{n-1} \cdot \tilde{P}_n$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \psi_0 &= P_1 - P_0 \\ \psi_{\lambda} &= P_{\lambda-1} - 2P_{\lambda} + P_{\lambda+1} \quad \text{für } 1 \leq \lambda \leq n-2 \\ \psi_{n-1} &= P_{n-2} - 2P_{n-1} \\ \psi_n &= P_{n-1} \end{aligned} \quad (9.9)$$

kann man für Gl.(9.8) auch schreiben

$$(\tilde{P}_1 - 2) \cdot A(s) = \sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} \cdot \tilde{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} \cdot (e^{s\lambda T} + e^{-s\lambda T}) \quad , \quad (9.10)$$

Durch Einsetzen der Gl.(9.10) in Gl.(9.2) ergibt sich

$$F(s) = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s^2} \cdot \sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} (e^{s\lambda T} + e^{-s\lambda T}) \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) \right] \quad (9.11)$$

$$= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s^2} \cdot \left(\sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} \cdot e^{s\lambda T} \right) \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) + \frac{1}{s^2} \cdot \left(\sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} \cdot e^{-s\lambda T} \right) \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) \right].$$

Setzt man ferner zur Vereinfachung

$$\tilde{F}(s) = \sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} \cdot e^{s\lambda T} \quad , \quad (9.12)$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \tilde{F}(s) \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) \quad (9.13)$$

und

$$F_2(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \tilde{F}(-s) \cdot H_S(-s) \cdot H_S(s) \quad (9.14)$$

so erhält man aus Gl.(9.11)

$$F(s) = \frac{1}{T} (F_1(s) + F_2(s)) \quad . \quad (9.15)$$

Diejenigen Pole von $F_1(s)$, die in der linken s -Halbebene liegen, liegen alle im Endlichen. Dasselbe gilt für diejenigen Pole von $F_2(s)$, die in der rechten Halbebene liegen. Sowohl $F_1(s)$ als auch $F_2(s)$ haben bei $s=0$ einen doppelten Pol, nicht jedoch $F(s)$; wie man durch zweimalige Anwendung der de l'Hôpital'schen Regel zeigen kann, hat $F(s)$ bei $s=0$ den Wert $T \cdot A(0) \cdot |H_S(0)|^2$.

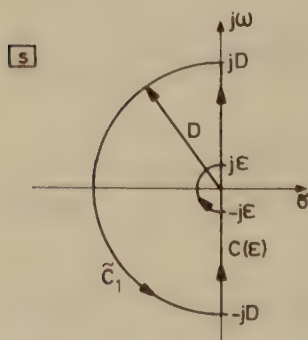
Wir betrachten nun die beiden Integrale

$$I_1 = \oint_{C_1(\epsilon)} F_1(s) ds \quad (9.16)$$

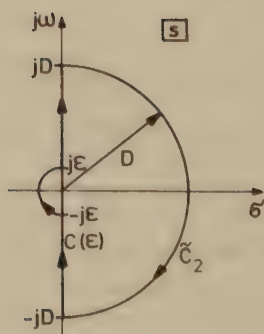
und

$$I_2 = \oint_{C_2(\epsilon)} F_2(s) ds \quad (9.17)$$

mit den Wegen $C_1(\epsilon)$ und $C_2(\epsilon)$ wie in Bild 8.1 skizziert. Bei praktischen Anwendungen wird der Zählergrad von $H_S(s)$ i.a. nicht größer sein als der Nennergrad; damit ist die Existenz von I_1 und I_2 gewährleistet.



Der Weg $C_1(\epsilon)$ setzt sich aus den Teilwegen $C(\epsilon)$ und $\tilde{C}_1$ zusammen: $C(\epsilon)$ verläuft auf der $j\omega$ -Achse von $-j \cdot D$ bis $-j\epsilon$, umgeht den Punkt $s=0$ auf einem Halbkreis (Radius ϵ) und läuft dann weiter von $j\epsilon$ bis $j \cdot D$. Dabei ist $\epsilon > 0$ so klein zu wählen, daß innerhalb eines Kreises mit dem Radius ϵ um $s=0$ kein Pol von $H_S(s)$ liegt. $\tilde{C}_1$ ist ein Halbkreis von $j \cdot D$ durch die linke s -Halbebene nach $-j \cdot D$.



Auch $C_2(\epsilon)$ besteht aus zwei Teilwegen, $C(\epsilon)$ und $\tilde{C}_2$. $C(\epsilon)$ ist identisch mit dem gleichnamigen Teilweg von $C_1(\epsilon)$. $\tilde{C}_2$ führt von $j \cdot D$ ab über einen Halbkreis (Radius D) durch die rechte s -Halbebene nach $-j \cdot D$ zurück. $C_2(\epsilon)$ wird also im Uhrzeigersinn, d. h. im mathematisch negativen Sinn durchlaufen.

Bild 9.1: Die Integrationswege bei der Berechnung von I_1 und I_2

Innerhalb von $C_1(\epsilon)$ sind die Pole von $F_1(s)$ mit den Polen $s_{\infty V}$ von $H_S(s)$ identisch. Wählt man D so groß, daß alle Pole von $H_S(s)$ innerhalb von $C_1(\epsilon)$ liegen (mit Sicherheit ist dies dann der Fall, wenn $D \rightarrow \infty$ strebt), so kann man auf Gl.(9.16) den Residuensatz (Gl.(5.44)) anwenden. Sei M der Grad von $H_S(s)$, so gilt mit der Abkürzung

$$C_{1\infty}(\epsilon) = \lim_{\text{Def. } D \rightarrow \infty} C_1(\epsilon) \quad (9.18)$$

für den Fall, daß $H_S(s)$ nur einfache Pole aufweist

$$\int_{C_{1\infty}(\epsilon)} F_1(s) ds = 2\pi j \cdot \sum_{V=1}^M (\text{Residuen von } F_1(s) \text{ zu den Polen innerhalb } C_{1\infty}(\epsilon))$$

$$= 2\pi j \cdot \sum_{V=1}^M (\text{Residuen zu den Polen von } H_S(s))$$

$$= 2\pi j \cdot \sum_{V=1}^M \lim_{s \rightarrow s_{\infty V}} [(s - s_{\infty V}) \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) \cdot \frac{1}{s^2} \tilde{F}(s)] \quad (9.19)$$

$$= 2\pi j \cdot \sum_{V=1}^M \lim_{s \rightarrow s_{\infty V}} [(s - s_{\infty V}) \cdot H_S(s)] \cdot H_S(-s_{\infty V}) \cdot \frac{1}{(s_{\infty V})^2} \tilde{F}(s_{\infty V})$$

$$= 2\pi j \cdot \sum_{V=1}^M \left[\frac{\hat{e}_V \cdot H_S(-s_{\infty V})}{(s_{\infty V})^2} \cdot \tilde{F}(s_{\infty V}) \right] ,$$

wobei $\hat{e}_V$ die Residuen von $H_S(s)$ entsprechend Gl.(5.32) sind. $F_2(s)$ hat innerhalb von $C_2(\epsilon)$ einfache Pole bei $s = -s_{\infty V}$ (es sind die Pole von $H_S(-s)$) und einen doppelten Pol bei $s=0$. Setzt man

$$C_{2\infty}(\epsilon) = \lim_{\text{Def. } D \rightarrow \infty} C_2(\epsilon) \quad (9.20)$$

und wendet auf Gl.(9.17) den Residuensatz an, so ergibt sich

$$\oint_{C_{2\infty}(\mathbb{E})} F_2(s) ds = -2\pi j \cdot \sum_{v=1}^M (\text{Residuen von } F_2(s) \text{ zu den Polen innerhalb } C_{2\infty}(\mathbb{E}))$$

$$= -2\pi j \cdot \sum_{v=1}^M (\text{Residuen zu den Polen von } H_S(-s)) + \quad (9.21)$$

$-2\pi j$ (Residuum zum doppelten Pol bei $s=0$)

Um den zweiten Summanden in Gl.(9.21) berechnen zu können, benötigt man noch die Beziehung, aus der man das Residuum zu einem Pol der Vielfachheit m erhält:

Sei $s=s_{\infty}$ ein m -facher Pol von $\hat{F}(s)$, dann ergibt sich das Residuum von $\hat{F}(s)$ in $s=s_{\infty}$ aus

$$\text{Res}_{s=s_{\infty}} (\hat{F}(s)) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-s_{\infty})^m \cdot \hat{F}(s) \right]_{s=s_{\infty}} \quad (9.22)$$

Mit den Gln.(5.32) und (9.22) erhält man nun aus Gl.(9.21)

$$\oint_{C_{2\infty}(\mathbb{E})} F_2(s) ds = -2\pi j \cdot \sum_{v=1}^M \lim_{s \rightarrow -s_{\infty v}} \left[(s+s_{\infty v}) \cdot H_S(-s) \right] \cdot H_S(-s_{\infty v}) \cdot \frac{\tilde{F}(s_{\infty v})}{(-s_{\infty v})^2} +$$

$$-2\pi j \cdot \frac{d}{ds} \left[s^2 \cdot H_S(s) \cdot H_S(-s) \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \tilde{F}(-s) \right]_{s=0}$$

$$= 2\pi j \cdot \sum_{v=1}^M \frac{\hat{e}_v \cdot H_S(-s_{\infty v})}{(s_{\infty v})^2} \cdot \tilde{F}(s_{\infty v}) + \quad (9.23)$$

$$-2\pi j \cdot (H'_S(s) \cdot H_S(-s) \cdot \tilde{F}(-s) - H_S(s) \cdot H'_S(-s) \cdot \tilde{F}(-s) - H_S(s) \cdot H_S(-s) \cdot \sum_{\lambda=1}^n \psi_{\lambda} \cdot \lambda \cdot T \cdot e^{-s\lambda T})_{s=0}$$

$$= 2\pi j \cdot \left[\sum_{v=1}^M \left(\frac{\hat{e}_v \cdot H_S(-s_{\infty v})}{(s_{\infty v})^2} \cdot \tilde{F}(s_{\infty v}) \right) + T \cdot |H_S(0)|^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^n \lambda \cdot \psi_{\lambda} \right].$$

Wenn der Zählergrad von $H_S(s)$ nicht größer ist als der Nennergrad, geht $F_1(s)$ für $s \rightarrow \infty$ zumindest wie s^{-2} gegen Null (vgl. Gl.(9.13)). Daher gilt

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \int_{\tilde{C}_1} F_1(s) ds = 0 \quad , \quad (9.24)$$

und es ist

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow \infty} \oint_{C_1(\epsilon)} F_1(s) ds &= \lim_{D \rightarrow \infty} \left[\int_{C(\epsilon)} F_1(s) ds + \int_{\tilde{C}_1} F_1(s) ds \right] \\ &= \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{C(\epsilon)} F_1(s) ds + \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{\tilde{C}_1} F_1(s) ds \\ &= \int_{C_\infty(\epsilon)} F_1(s) ds . \end{aligned} \quad (9.25)$$

Dabei wurde

$$C_\infty(\epsilon) \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{D \rightarrow \infty} C(\epsilon) \quad (9.26)$$

gesetzt.

Die analoge Überlegung bei $F_2(s)$ ergibt

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \oint_{C_2(\epsilon)} F_2(s) ds = \int_{C_\infty(\epsilon)} F_2(s) ds . \quad (9.27)$$

Da also für $D \rightarrow \infty$ die Integrationswege für $F_1(s)$ und $F_2(s)$ identisch werden (in beiden Fällen gleich $C_\infty(\epsilon)$), kann man die Integrale zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{C_1(\epsilon)} F_1(s) ds + \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{C_2(\epsilon)} F_2(s) ds &= \int_{C_\infty(\epsilon)} F_1(s) ds + \int_{C_\infty(\epsilon)} F_2(s) ds = \\ &= \int_{C_\infty(\epsilon)} (F_1(s) + F_2(s)) ds = T \cdot \int_{C_\infty(\epsilon)} F(s) ds \end{aligned} \quad (9.28)$$

Um die Verbindung zu Gl.(9.1) herzustellen, ist nun noch zu zeigen, daß

$$\int_{C_{\infty}(\epsilon)} F(s) ds = \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) ds \quad (9.29)$$

gilt. Dazu wird die Integration über den Weg $C_{\infty}(\epsilon)$ aufgeteilt:

$$\int_{C_{\infty}(\epsilon)} F(s) ds = \int_{-j\infty}^{-j\epsilon} F(s) ds + \int_{\gamma_{\epsilon}} F(s) ds + \int_{j\epsilon}^{j\infty} F(s) ds \quad (9.30)$$

Dabei soll γ_{ϵ} den Weg von $-j\epsilon$ über einen Halbkreis mit dem Radius ϵ durch die linke s -Halbebene nach $+j\epsilon$ bedeuten, wie in Bild 9.2 angedeutet. Gl.(9.29) gilt genau dann, wenn

$$\int_{\gamma_{\epsilon}} F(s) ds = \int_{-j\epsilon}^{j\epsilon} F(s) ds \quad (9.31)$$

gilt.

Da $F(s)$ innerhalb des Kreises mit Radius ϵ um $s=0$ nach Voraussetzung keinen Pol hat (vgl. Bild 9.1), ist

$$\oint_C F(s) ds = 0 \quad (9.32)$$

wenn sich der Weg C aus den in Bild 9.2 skizzierten Wegen C' und C'' zusammensetzt.

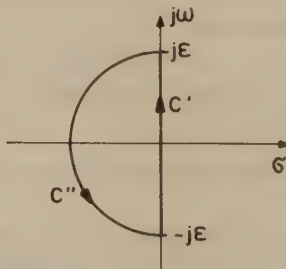


Bild 9.2: Integrationswege in Gl.(9.33)

Gl.(9.32) ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
 \oint_C F(s) ds &= \int_{C'} F(s) ds + \int_{C''} F(s) ds \\
 &= \int_{C'} F(s) ds - \int_{\tilde{C}_E} F(s) ds \\
 &= \int_{-jE}^{jE} F(s) ds - \int_{\tilde{C}_E} F(s) ds \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.33}$$

Aus Gl.(9.33) ergibt sich unmittelbar die Gültigkeit von Gl.(9.31) und damit auch Gl.(9.29). Einsetzen der Gln.(9.19) und (9.23) in Gl.(9.28) bzw. (9.29) ergibt

$$\begin{aligned}
 \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{C_1(E)} F_1(s) ds + \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{C_2(E)} F_2(s) ds &= \int_{C_{1\infty}(E)} F_1(s) ds + \int_{C_{2\infty}(E)} F_2(s) ds = \\
 &= 4\pi j \cdot \sum_{v=1}^M \left(\frac{\hat{e}_v \cdot H_S(-s_{\infty v})}{(s_{\infty v})^2} \cdot \sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} \cdot e^{s_{\infty v} \cdot \lambda \cdot T} \right) + 2\pi j \cdot T |H_S(0)|^2 \sum_{\lambda=1}^n \lambda \cdot \psi_{\lambda} =
 \end{aligned}
 \tag{9.34}$$

$$= T \cdot \int_{C_{\infty}(E)} F(s) ds = T \cdot \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) ds .$$

Aus den Gln.(9.1), (9.2) und (9.34) erhält man schließlich wegen

$$S_{PR}^{(r)} = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) ds
 \tag{9.35}$$

$$S_{PR}^{(r)} = \frac{2}{T} \cdot \sum_{v=1}^M \left[\frac{\tilde{e}_v \cdot H_S(-s_{\infty v})}{(s_{\infty v})^2} \cdot \sum_{\lambda=0}^n \psi_{\lambda} \cdot e^{s_{\infty v} \cdot \lambda \cdot T} \right] + |H_S(0)|^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^n \lambda \cdot \psi_{\lambda}. \quad (9.36)$$

Ergänzend werden hier noch die Werte der Hilfsgrößen P_{λ} und ψ_{λ} berechnet, mit Hilfe derer in Kap. 5 die mittleren Signalleistungen für die ausgewählten Codes bestimmt wurden.

Code I: $n=1$; $d_0=1$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= d_0^2 = 1 \\ P_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \psi_0 &= P_1 - P_0 = -1 \\ \psi_1 &= P_0 = 1 \end{aligned} \quad (9.37)$$

Code II: $n=2$; $d_0=d_1=1$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= d_0^2 + d_1^2 = 2 \\ P_1 &= d_0 \cdot d_1 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \psi_0 &= P_1 - P_0 = -1 \\ \psi_1 &= P_0 - 2P_1 = 0 \\ \psi_2 &= P_1 = 1 \end{aligned} \quad (9.38)$$

Code III: $n=2$; $d_0=1$, $d_1=-1$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= d_0^2 + d_1^2 = 2 \\ P_1 &= d_0 \cdot d_1 = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \psi_0 &= P_1 - P_0 = -3 \\ \psi_1 &= P_0 - 2P_1 = 4 \\ \psi_2 &= P_1 = -1 \end{aligned} \quad (9.39)$$

Code IV: $n=3$; $d_0=1$, $d_1=0$, $d_2=-1$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 = 2 \\ P_1 &= d_0 d_1 + d_1 d_2 = 0 \\ P_2 &= d_0 d_2 = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \psi_0 &= P_1 - P_0 = -2 \\ \psi_1 &= P_0 - 2P_1 + P_2 = 1 \\ \psi_2 &= P_1 - 2P_2 = 2 \\ \psi_3 &= P_2 = -1 \end{aligned} \quad (9.40)$$

9.2. Abschätzung der für die Augenberechnung erforderlichen Anzahl von Abtastwerten $h(t_0 + \lambda \cdot T)$

In jeder der Beziehungen zur Berechnung des inneren Augenrandes (Gl.(4.85) für Code I; Gln.(4.76), (4.77) für Code II; Gln.(4.58), (4.59) für Code III; Gln.(4.40), (4.41) für Code IV) tritt ein Summand der Form

$\sum_{\lambda=-l_1}^{-1} |h(t_0 - \lambda \cdot T)| = \sum_{\lambda=l_1}^{\infty} |h(t_0 + \lambda \cdot T)|$ auf. Der Wert l_1 ist für die einzelnen Codes verschieden. In praktischen Anwendungsfällen ist es natürlich nicht möglich, bei der Augenberechnung unendlich viele Abtastwerte $h(t_0 + \lambda \cdot T)$ zu berücksichtigen, vielmehr muß es genügen, mit der endlichen Summe $\sum_{\lambda=l_1}^{l_2} |h(t_0 + \lambda \cdot T)|$ anstelle von $\sum_{\lambda=l_1}^{\infty} |h(t_0 + \lambda \cdot T)|$ zu rechnen. Um so wichtiger ist es daher, zu wissen, wieviele Werte berücksichtigt werden müssen, um den Augenfehler mit einer ausreichenden Genauigkeit angeben zu können. Die folgende Betrachtung ermöglicht eine, wenn auch grobe, Abschätzung des Restes

$$\sum_{\lambda=l_2}^{\infty} |h(t_0 + \lambda \cdot T)| = \sum_{\mu=0}^{\infty} |h(t_0 + l_2 \cdot T + \mu \cdot T)| = \sum_{\mu=0}^{\infty} |h(t_1 + \mu \cdot T)| \stackrel{\text{Def.}}{=} TR(t_1) \quad (9.41)$$

$$\text{mit } t_0 + l_2 \cdot T \stackrel{\text{Def.}}{=} t_1$$

$h(t)$ läßt sich aus den N_R reellen und den $2 \cdot N_K$ komplexen Polen $s_{\infty v}$ der Übertragungsfunktion $H(s)$ sowie den zugehörigen Residuen e_v mit Hilfe der Beziehung

$$h(t) = \sum_{v=1}^{N_1} e_v \cdot e^{s_{\infty v} t}, \quad N_1 = N_R + 2 \cdot N_K \quad (9.42)$$

berechnen, falls die Pole einfach sind. Sei nun

$$\operatorname{Re} \{s_{\infty v}\} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sigma_{\infty v} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \{s_{\infty v}\} \stackrel{\text{Def.}}{=} \omega_{\infty v} \quad (9.43)$$

sowie

$$\operatorname{Re} \{e_v\} \stackrel{\text{Def.}}{=} X_v \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \{e_v\} \stackrel{\text{Def.}}{=} Y_v, \quad (9.44)$$

dann trägt ein reeller Pol zu $h(t)$ mit dem Anteil

$$y_{RV}(t) = X_V \cdot e^{\sigma_{\infty V} t} \quad (9.45)$$

bei und ein konjugiert-komplexes Polpaar liefert den Beitrag

$$\begin{aligned} y_{KV}(t) &= (X_V + jY_V) \cdot e^{\sigma_{\infty V} t} \cdot e^{j\omega_{\infty V} t} + (X_V - jY_V) \cdot e^{\sigma_{\infty V} t} \cdot e^{-j\omega_{\infty V} t} \\ &= e^{\sigma_{\infty V} t} \left\{ X_V \cdot (e^{j\omega_{\infty V} t} + e^{-j\omega_{\infty V} t}) + jY_V \cdot (e^{j\omega_{\infty V} t} - e^{-j\omega_{\infty V} t}) \right\} \\ &= 2e^{\sigma_{\infty V} t} \left\{ X_V \cdot \cos \omega_{\infty V} t - Y_V \cdot \sin \omega_{\infty V} t \right\} \\ &= 2 \cdot \sqrt{X_V^2 + Y_V^2} \cdot e^{\sigma_{\infty V} t} \cdot \sin \left[\omega_{\infty V} t + \arctg \left(-\frac{X_V}{Y_V} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.46)$$

Nach geeigneter Umordnung der Pole läßt sich Gl.(9.42) dann in der Form

$$h(t) = \sum_{v=1}^{N_R} y_{RV}(t) + \sum_{v=N_R+1}^{N_2} y_{KV}(t) \quad , \quad N_2 = N_R + N_K \quad (9.47)$$

schreiben und es gilt

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq \sum_{v=1}^{N_R} |y_{RV}(t)| + \sum_{v=N_R+1}^{N_2} |y_{KV}(t)| \\ &\leq \sum_{v=1}^{N_R} |X_V \cdot e^{\sigma_{\infty V} t}| + 2 \cdot \sum_{v=N_R+1}^{N_2} |\sqrt{X_V^2 + Y_V^2} \cdot e^{\sigma_{\infty V} t}| \end{aligned} \quad (9.48)$$

Ferner erhält man für die in Gl.(9.41) definierte Restsumme $R(t_1)$ zunächst die Aussage

$$R(t_1) \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^{N_R} |X_V \cdot e^{\sigma_{\infty V}(t_1 + \mu \cdot T)}| + 2 \cdot \sum_{v=N_R+1}^{N_2} |\sqrt{X_V^2 + Y_V^2} \cdot e^{\sigma_{\infty V}(t_1 + \mu \cdot T)}| \right) \quad (9.49)$$

Die Frage, ob in Gl.(9.49) die Summation über μ mit der Summation über v vertauscht werden darf, wird durch die Untersuchung der unendlichen Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} |X_v \cdot e^{\sigma_{\infty v}(t_1 + \mu \cdot T)}|$ beantwortet. Es gilt

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |X_v \cdot e^{\sigma_{\infty v}(t_1 + \mu \cdot T)}| = |X_v \cdot e^{\sigma_{\infty v} \cdot t_1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} (e^{\sigma_{\infty v} \cdot T})^{\mu}|. \quad (9.50)$$

Wenn $H(s)$ die Übertragungsfunktion eines stabilen Systems darstellt, ist für alle v $\sigma_{\infty v} < 0$; dann konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} (e^{\sigma_{\infty v} \cdot T})^{\mu}$ und kann durch ihre Summe $(1 - e^{\sigma_{\infty v} \cdot T})^{-1}$ ersetzt werden. Man erhält

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |X_v \cdot e^{\sigma_{\infty v}(t_1 + \mu \cdot T)}| = \left| \frac{X_v \cdot e^{\sigma_{\infty v} \cdot t_1}}{1 - e^{\sigma_{\infty v} \cdot T}} \right|. \quad (9.51)$$

Da die gleiche Überlegung auch für den Beitrag der konjugiert-komplexen Polpaare in Gl.(9.49) gilt, ist die oben erwähnte Vertauschung der Summation über μ mit der Summation über v erlaubt.

Mit der Abkürzung

$$\frac{e^{\sigma_{\infty v} \cdot t_1}}{1 - e^{\sigma_{\infty v} \cdot T}} \stackrel{\text{Def.}}{=} y_v(t_1) \quad (9.52)$$

ergibt sich für die Restsumme schließlich die Abschätzung

$$\mathcal{R}(t_1) \leq \sum_{v=1}^{N_R} |X_v \cdot y_v(t_1)| + 2 \cdot \sum_{v=N_R+1}^{N_2} |\sqrt{X_v^2 + Y_v^2} \cdot y_v(t_1)|. \quad (9.53)$$

Wenn nun etwa angegeben werden soll, der maximale vertikale Augendurchmesser liege zwischen $D_v - |\epsilon_{\alpha}|$ und D_v , so muß beim Code I der Zeitpunkt t_1 derart bestimmt werden, daß $\mathcal{R}(t_1) < |\epsilon_{\alpha}|$ ist. Bei den Codes II-IV ist zu bedenken, daß $\mathcal{R}(t_1)$ sowohl den unteren als auch den oberen Augenrand beeinflusst und auf diese Weise zweifach in D_v eingeht. Bei diesen Codes ist demnach t_1 so festzulegen, daß $\mathcal{R}(t_1) < |\epsilon_{\alpha}|/2$ wird.

9.3. Parameter der Übertragungsfunktionen der Beispiele aus Kap. 7

9.3.1. Übertragungsfunktionen, die in Abschnitt 7.2 durch Minimierung des relativen Augenfehlers gewonnen wurden

Die Pole und Nullstellen sind auf die Sperrgrenze normiert: $\omega_g/2\pi = 1$.

$\ddot{U} = 1 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$		$\omega_g = 2 \cdot \omega_N$	$\Delta \alpha = 0.04$	$\ddot{U} = 1.25 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$	$\omega_g = 1.6 \cdot \omega_N$	$\Delta \alpha = 0.05$
Nullstellen	0	$\pm j \cdot 1.029$	620	0	$\pm j \cdot 1.044$	006
	0	$\pm j \cdot 1.460$	030	0	$\pm j \cdot 1.664$	166
	0.374	$700 \pm j \cdot 0.313$	000	0.366	$067 \pm j \cdot 0.200$	266
Pole	-0.350	600		-1.464	622	
	-0.238	$200 \pm j \cdot 0.541$	800	-0.246	$370 \pm j \cdot 0.399$	353
	-0.072	$501 \pm j \cdot 0.847$	000	-0.106	$498 \pm j \cdot 0.737$	436
	-0.374	$700 \pm j \cdot 0.313$	000	-0.366	$067 \pm j \cdot 0.200$	266
$\ddot{U} = 1.5 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$		$\omega_g = 1.33 \cdot \omega_N$	$\Delta \alpha = 0.07$	$\ddot{U} = 1.75 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$	$\omega_g = 1.143 \cdot \omega_N$	$\Delta \alpha = 0.13$
Nullstellen	0	$\pm j \cdot 1.031$	100	0	$\pm j \cdot 1.023$	176
	0	$\pm j \cdot 1.469$	300	0	$\pm j \cdot 1.383$	478
	0.298	$316 \pm j \cdot 0.253$	621	0.415	$503 \pm j \cdot 0.308$	011
Pole	-0.450	050		-0.501	561	
	-0.171	$000 \pm j \cdot 0.587$	000	-0.179	$637 \pm j \cdot 0.717$	831
	-0.094	$028 \pm j \cdot 0.819$	863	-0.016	$764 \pm j \cdot 0.874$	885
	-0.298	$316 \pm j \cdot 0.253$	621	-0.415	$503 \pm j \cdot 0.308$	011

Tiefpässe zur Übertragung binär-bipolar codierter Rechteckzeichenfolgen mit der Übertragungsrate $\ddot{U}$ und kleinem relativen Augenfehler $\Delta \alpha$ (Code I)

$\ddot{U}: 1 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 2 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.05$		$\ddot{U}: 1.25 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.6 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.07$	
Nullstellen	0 0 0.436 246 $\pm$ j . 0.306 994	0 0 0.362 764 $\pm$ j . 0.224 851	Nullstellen
Pole	-0.358 357 -0.235 500 $\pm$ j . 0.538 432 -0.065 528 $\pm$ j . 0.845 015 -0.436 246 $\pm$ j . 0.306 994	-1.336 875 -0.263 410 $\pm$ j . 0.394 464 -0.128 986 $\pm$ j . 0.733 851 -0.362 764 $\pm$ j . 0.224 851	Pole
$\ddot{U}: 1.5 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.33 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.05$		$\ddot{U}: 1.75 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.143 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.12$	
Nullstellen	0 0 0.335 700 $\pm$ j . 0.252 200	0 0 0.277 422 $\pm$ j . 0.267 186	Nullstellen
Pole	-0.455 800 -0.177 200 $\pm$ j . 0.586 400 -0.125 615 $\pm$ j . 0.810 616 -0.335 700 $\pm$ j . 0.252 200	-0.380 973 -0.149 804 $\pm$ j . 0.605 854 -0.051 223 $\pm$ j . 0.829 819 -0.277 422 $\pm$ j . 0.267 186	Pole

Tiefpässe zur Übertragung duobinär codierter Rechteckzeichenfolgen mit der Übertragungsrate $\ddot{U}$ und kleinem relativen Augenfehler $\Delta\alpha$ (Code II)

$\ddot{U} = 1 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 2 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.07$		$\ddot{U} = 1.25 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.6 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.08$	
Nullstellen	0 0 0.325 841 $\pm$ j · 0.309 600	0 0 0.361 009 $\pm$ j · 0.224 760	Nullstellen
Pole	-0.361 000 -0.228 000 $\pm$ j · 0.537 500 -0.116 700 $\pm$ j · 0.854 400 -0.325 841 $\pm$ j · 0.309 600	-1.409 989 -0.251 744 $\pm$ j · 0.398 867 -0.103 199 $\pm$ j · 0.737 101 -0.361 009 $\pm$ j · 0.224 760	Pole
$\ddot{U} = 1.5 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.33 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.13$		$\ddot{U} = 1.75 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.143 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.19$	
Nullstellen	0 0 0.274 428 $\pm$ j · 0.254 007	0 0 0.424 850 $\pm$ j · 0.310 138	Nullstellen
Pole	-0.436 923 -0.163 197 $\pm$ j · 0.584 951 -0.091 657 $\pm$ j · 0.821 300 -0.274 428 $\pm$ j · 0.254 007	-0.481 858 -0.184 518 $\pm$ j · 0.727 250 -0.017 020 $\pm$ j · 0.874 857 -0.424 850 $\pm$ j · 0.310 138	Pole

Tiefpässe zur Übertragung pseudoternär codierter Rechteckzeichenfolgen mit der Übertragungsrate $\ddot{U}$ und kleinem relativen Augenfehler $\Delta\alpha$ (Code III)

$\ddot{U} = 1 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 2 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.07$		$\ddot{U} = 1.25 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.6 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.04$	
Nullstellen	0 0 0.460 113 $\pm$ j $\cdot$ 0.290 000	0 0 0.373 134 $\pm$ j $\cdot$ 0.192 600	Nullstellen
Pole	-0.355 617 -0.226 702 $\pm$ j $\cdot$ 0.537 085 -0.065 737 $\pm$ j $\cdot$ 0.849 300 -0.460 113 $\pm$ j $\cdot$ 0.290 000	-1.100 101 -0.251 067 $\pm$ j $\cdot$ 0.447 349 -0.154 106 $\pm$ j $\cdot$ 0.719 705 -0.373 134 $\pm$ j $\cdot$ 0.192 600	Pole
$\ddot{U} = 1.5 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.33 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.09$		$\ddot{U} = 1.75 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$, $\omega_g = 1.143 \cdot \omega_N$, $\Delta\alpha = 0.13$	
Nullstellen	0 0 0.298 518 $\pm$ j $\cdot$ 0.253 493	0 0 0.395 114 $\pm$ j $\cdot$ 0.311 907	Nullstellen
Pole	-0.448 743 -0.171 204 $\pm$ j $\cdot$ 0.587 393 -0.106 071 $\pm$ j $\cdot$ 0.820 177 -0.298 518 $\pm$ j $\cdot$ 0.253 493	-0.490 250 -0.189 843 $\pm$ j $\cdot$ 0.692 809 -0.016 388 $\pm$ j $\cdot$ 0.873 729 -0.395 114 $\pm$ j $\cdot$ 0.311 907	Pole

Tiefpässe zur Übertragung nach PR-Klasse 4, n=3 codierter Rechteckzeichen-
folgen mit der Übertragungsrate $\ddot{U}$ und kleinem relativen Aufgabenfehler $\Delta\alpha$ (Code IV)

Realisierung 2

Filter für die Übertragung von Rechteckzeichenfolgen mit der Nyquistrate $\ddot{U}_N = 2 \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}}$. Es ist $\omega_g = \omega_N = \frac{\pi}{T}$.

Tiefpaß für den Duobinärcode (Code II):

Nullstellen: 0 $\pm j \cdot 1.030 \ 267$
 0 $\pm j \cdot 1.462 \ 487$
 0.362 027 $\pm j \cdot 0.295 \ 436$

Pole: -0.334 919
 -0.226 983 $\pm j \cdot 0.557 \ 475$
 -0.083 249 $\pm j \cdot 0.839 \ 871$
 -0.362 027 $\pm j \cdot 0.295 \ 436$

Bandpaß für den PR-Code Klasse 4, n=3 (Code IV)

Nullstellen: 0
 0 $\pm j \cdot 1.035 \ 134$
 0 $\pm j \cdot 1.725 \ 545$
 0.288 568 $\pm j \cdot 0.603 \ 137$
 0.290 950 $\pm j \cdot 0.232 \ 357$

Pole: -0.286 750 $\pm j \cdot 0.239 \ 347$
 -0.229 482 $\pm j \cdot 0.712 \ 294$
 -0.130 542 $\pm j \cdot 0.858 \ 486$
 -0.288 568 $\pm j \cdot 0.603 \ 137$
 -0.290 950 $\pm j \cdot 0.232 \ 357$

9.3.2. Übertragungsfunktionen, die in Abschnitt 7.3
durch Minimierung der Fehlerwahrscheinlichkeit
gewonnen wurden

Die Pole und Nullstellen sind auf 1 MHz normiert.

Nachbildung von 2 km Ortskabel (0.6 mm $\varnothing$):

Nullstelle: -0.199 812

Pole: -0.101 904

-0.349 401

-0.434 143

Leitungsübertrager:

Nullstelle: 0

Pol: -0.01

Näherung für das Sendefilter (Dämpfungsentzerrer):

Nullstellen: -0.140 629

-0.552 568

Pole: -5.811 651

-5.085 676

Näherung für das Empfangsfilter:

Pole: -1.000 781

-0.500 390 $\pm j \cdot 0.866 702$

Lösungen

Code I:

	Sendefilter	Empfangsfilter
Nullstellen:	-0.133 810 -0.632 000	
Pole:	-30.466 454 -4.227 468	-1.809 224 -0.728 694 $\pm j \cdot 0.920 870$

Code II:

	Sendefilter	Empfangsfilter
Nullstellen:	-0.126 566 -0.606 529	
Pole:	-7.745 841 -7.310 659	-0.888 193 -0.702 892 $\pm j \cdot 1.050 876$

Code III (mit Leitungsübertrager):

	Sendefilter	Empfangsfilter
Nullstellen:	-0.195 123 -0.581 491	
Pole:	-2.964 850 -3.067 298	-3.277 557 -0.599 002 $\pm j \cdot 0.919 855$

Code IV (mit Leitungsübertrager):

	Sendefilter	Empfangsfilter
Nullstellen:	-0.186 437 -0.569 835	
Pole:	-5.902 458 -8.025 832	-1.792 219 -0.588 093 $\pm j \cdot 0.903 012$

Literaturverzeichnis

- [1] Kersten, R.: Signalarten und Signalformen bei der Übertragung von PCM-Signalen auf symmetrischen Fernsprechkabeln.
AEÜ 22, Heft 10, 1968, S. 461-471.
- [2] Appel, U.: Vergleich von Codes für die Übertragung digitaler Signale in regenerativen Kanälen.
Dissertation TU München, Juli 1971.
- [3] Wellhausen, H.W.: Beitrag zur Übertragung digitaler Basisband-Signale über Koaxialkabel.
Fernmeldeingenieur 26, Heft 1, 1972.
- [4] Kohlschmidt, R.: Optimierung einer Pulsmodulations-Übertragungsstrecke bezüglich Sicherheit gegenüber Störungen.
Nachrichtentechnik 18, 1968, S. 253-257.
- [5] Kress, D.: Zur linearen Filterung bei der Übertragung von PCM-Signalen über Kabel.
Nachrichtentechnik 18, 1968, S. 346-350.
- [6] Appel, U., Tröndle, K.: Vergleich verschiedener Codes für die Übertragung digitaler Signale.
NTZ 23, 1970, S. 189-196.
- [7] Antreich, K., Hauk, W., Welzenbach, M.: Zur Auslegung der Entzerrernetzwerke für die Übertragung von PCM-Signalen auf Kabeln.
AEÜ 25, Heft 3, 1971, S. 109-116.

- [8] Marko, H.: Comparison of Binary and Multilevel Digital Transmission Systems in the Presence of Intersymbol Interference and Thermal Noise.
NTZ 27, Heft 6, 1974, S. 239-242.
- [9] Kobayashi, H.: Correlative level coding maximum-likelihood decoding.
IEEE Trans. on IT, Vol. IT-17, No. 5, Sept. 1971, S. 586-594.
- [10] Kobayashi, H.: A survey of coding schemes for transmission or recording of digital data.
IEEE Trans. on COM, Vol. COM-19, No. 6, Dec. 1971, S. 1087-1100.
- [11] Ferguson, M.J.: Optimal reception for binary partial response channels.
BSTJ 51, No. 2, Febr. 1972, S. 493-505.
- [12] Forney, G.D.: Maximum likelihood estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference.
IEEE Trans. on IT, Vol. IT-18, No. 3, May 1972, S. 363-378.
- [13] Lucky, R.W., Salz, J., Weldon, E.J.: Principles of data communication.
Mc Graw Hill, New York, 1968.
- [14] Schüßler, W.: Zum Entwurf impulsformender Netzwerke.
Nachrichtentechnische Fachberichte, Band 37, 1969, S. 257-270.
- [15] Achilles, D.: Zur Impulsformung für die Datenübertragung.
AEÜ 24, 1970, Heft 4, S. 186-193.

- [16] Kobayashi, H.: On the relationship between the channel frequency characteristic and intersymbol interference.
IBM Research, RC 2129.
- [17] Ho, E.Y., Yeh, Y.S.: A new approach for evaluating the error probability in the presence of intersymbol interference and additive Gaussian noise.
BSTJ 49, No. 9, Nov. 1970, S. 2249-2266.
- [18] Ho, E.Y., Yeh, Y.S.: Error probability of a multi-level digital system with intersymbol interference and Gaussian noise.
BSTJ 50, No. 3, March 1971, S. 1017-1023.
- [19] Benedetto, S., de Vincentiis, G., Luvison, A.: Error probability in the presence of intersymbol interference and additive noise for multilevel digital signals.
IEEE Trans. on COM, Vol. COM-21, No. 3, March 1973, S. 181-190.
- [20] Murphy, J.V.: Binary error rate caused by intersymbol interference and Gaussian noise.
IEEE Trans. on COM, Vol. COM-21, No. 9, Sept. 1973, S. 1039-1046.
- [21] Steinbuch, K., Rupprecht, W.: Nachrichtentechnik.
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1967.
- [22] Unbehauen, R.: Systemtheorie-Eine Einführung für Ingenieure.
Verlag R. Oldenbourg, München, Wien 1969.

- [23] Spaulding, D.A.: Synthesis of pulse-shaping networks in the time domain.
BSTJ 48, No. 9, Sept. 1969, S. 2425-2444.
- [24] Kretzmer, E.R.: Binary Data Communication by Partial Response Transmission.
First IEEE Annual Communications Convention,
Boulder, Colorado U.S.A., 7.-9. June 1965, Conference Record S. 451-455.
- [25] Kretzmer, E.R.: Generalization of a technique for binary data communication.
IEEE Trans. on Comm. Tech., Vol. COM-14, Febr. 1966, S. 67-68.
- [26] Lender, A.: Correlative level coding for binary-data transmission.
IEEE Spectrum 3, No. 2, Febr. 1966, S. 104-115.
- [27] Becker, F.K., Kretzmer, E.R., Sheehan, J.R.: An new signal format for efficient data transmission.
BSTJ May/June 1966, S. 755-758.
- [28] Leuthold, P., Tisi, F.: Ein Einseitenbandsystem für die Datenübertragung.
AEÜ 21, Heft 7, 1967, S. 354-362.
- [29] Gibson, E.D.: A highly adaptive 9600/4800 bps data modem for voice-band telephone channels.
70-CP-435-COM, S. 12-1 bis 12-6.
- [30] Schüßler, W.: Der Echoentzerrer als Modell eines Übertragungskanals.
NTZ 1963, Heft 3, S. 155-163.

- [31] Bennett, W.R., Davey, J.R.: Data transmission.⁴
Mc Graw Hill, New York, 1965.
- [32] Lender, A.: The duobinary technique for high speed data transmission.
IEEE Trans. on Comm. a. Electr., May 1963, S. 214-218.
- [33] Schmidt, K.H.: Datenübertragung mit kontrollierter Nachbarzeichenbeeinflussung.
Elektr. Nachrichtenwesen 48, Nr. 1 u. 2, 1973, S. 129-141.
- [34] Jess, J., Schübler, H.W.: On the Design of Pulse-Forming Networks.
IEEE Trans. on CT, Vol. CT-12, No. 3, Sept. 1965, S. 393-400.
- [35] Middleton, D.: An Introduction to Statistical Communication Theory.
Mc Graw Hill, New York 1960.
- [36] Schübler, W.: Die Darstellung der Korrelierten von Impulsantworten stabiler Netzwerke.
NTZ 17, 1964, S. 385-387.
- [37] Doetsch, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.
Birkhäuser Verlag Basel 1958.
- [38] Powell, M.J.D.: An efficient method of finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives.
The Computer Journal, Vol. 7, 1964, S. 155-162.

- [39] Feistel, K.H., Unbehauen, R.: Tiefpässe mit Tschebyscheff-Charakter der Betriebsdämpfung im Sperrbereich und und maximal geebneter Laufzeit.
Frequenz 19, 1965, H.8, S. 265-282.

- [40] Temes, G.C., Gyi, M.: Design of filters with arbitrary passband and Chebyshev stopband attenuation.
1967 IEEE Int. Conv. Digest, March 20-23, 1967,
paper 32.1, pp. 184-185.

- [41] Antreich, K.: Zur Realisierung von Dämpfungsfunktionen mit reflexionsfreien Impedanzvierpolen.
Dissertation T.H. Karlsruhe 1966.

Lebenslauf

- 9.2.1939 geboren in München als Sohn des Universitätsprofessors Dr. Rudolf Till und seiner Ehefrau Marietta, geb. Bedall
- 1945 - 1949 Besuch der Volksschule in Schliersee und Neerlage
- 1949 - 1958 Besuch des staatl. anerkannten humanistischen Gymnasiums Schule Birklehof in Hinterzarten, Abschluß Reifeprüfung
- 1958 Jurastudium an der Universität Freiburg
- 1958 - 1961 Studium der Physik an der Universität München, Diplom-Vorprüfung
- 1961 - 1966 Studium der Physik an der Universität Erlangen, Abschluß Diplom-Hauptprüfung
- 1966 - 1969 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Nachrichtentechnik der Universität Erlangen/Nürnberg
- seit 1970 Entwicklungsingenieur in einem Labor für Systemtheorie der Abteilung Vorentwicklung bei AEG-Telefunken in Backnang

Rudolf Till

